



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
11 класс



Решения

1. Числа $a < b$ таковы, что их НОД имеет 39 делителей (включая 1 и себя), а их НОК — 77 делителей. Докажите, что $b = a^2$.

Решение. Напомним следующий факт.

Пусть $x = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$. Тогда количество делителей равно $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_k + 1)$.

Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$, тогда $d = p^{38}$ или $d = p^{12} q^2$ для некоторых простых p и q .

Пусть $M = \text{НОК}(a, b)$, тогда $M = p^{76}$ или $M = p^{10} q^6$. Случай $M = p^{10} q^6$ противоречит любому из случаев выбора d , так как M должно делиться на d . Значит, $M = p^{76}$, а тогда $d = p^{38}$, то есть a и b — степени p . Если точнее, $a = p^{38}$, $b = p^{76}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Пропущен разбор некоторых случаев разложений a и b — 5 баллов

(в) Решение опирается на то что $b = a^2$ — 0 баллов

2. На доске написано несколько линейных функций. Андрей заметил, что если взять две любые написанные функции, перемножить их и взять производную результата, то полученная функция тоже окажется написанной на доске. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.

Решение 1. Докажем, что все эти функции имеют общий корень (и тогда их графики, очевидно, проходят через одну точку). В самом деле, допустим противное и рассмотрим такие две выписанные функции f и g с несовпадающими корнями a и b , что ни у одной из выписанных функций корень не находится между a и b (такие, очевидно, найдутся). Перемножим эти функции; вершина полученного квадратного трёхчлена fg является средним арифметическим a и b . Но эта вершина является экстремумом fg , т.е. корнем производной fg . Противоречие.

Решение 2. Заменим каждую линейную функцию $f(x) = kx + b$ на пару чисел (k, b) . Тогда, если у нас есть пары (a, b) и (c, d) , то мы можем написать пару $(2ac, ad + bc)$, что сводит нашу задачу к аналогичной задаче 8 класса.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

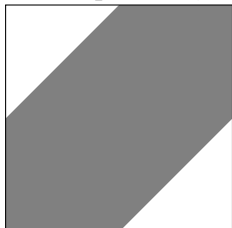
(б) Потеряны прямые вида $-\frac{1}{2}x + b$ — снять 3 балла

(в) Неправильно доказана конечность функций вида $\pm\frac{1}{2}x + b$ — снять 2 балла

3. У Ани и Бори есть проволоочная окружность, и они её решили поделить. Аня поставила на этой окружности метку в случайно выбранной точке, которую Боря не видит. Боря случайным образом выбирает две точки на окружности (выбор второй точки не зависит от выбора первой) и разрезает окружность в этих двух точках. Аня берёт себе ту часть окружности, в которой находится выбранная ей точка. Найдите вероятность того, что Анин кусок окажется длиннее Бориного.

Ответ: $3/4$.

Решение. Переформулируем задачу. Представим, что указанная окружность есть единичный отрезок (отождествляем $1=0$, но для задачи это неважно), а Анина метка стоит в точке 0. Боря случайно выбирает две точки, которые разбивают отрезок на три части. После этого Аня берёт первую и третью часть отрезка, а Боря вторую. После такой переформулировки задача становится классической задачей на геометрическую вероятность: по оси абсцисс отмечаем первый разрез, по оси ординат — второй. На рисунке закрашена область, где Аня выигрывает; её площадь, очевидно, равна $3/4$ от площади единичного квадрата.



Критерии.

- (а) Полное решение — 7 баллов
- (б) Ошибки в вычислениях, в итоге неправильный ответ, но решение верное — снять 2 балла
- (в) Перепутаны победа и поражение — снять 1 балл

4. Дан треугольник ABC . Точка I — центр вписанной окружности, E, F, G — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. На отрезке AF отмечена точка K , такая что $KF = FC$, а на продолжении AC за точку C отмечена точка L , такая что $AK = CL$. Прямая KI пересекается с отрезком EG в точке M . Отрезки IL и BC пересекаются в точке N . Докажите, что угол KMN прямой.

Решение. Поскольку $IE \perp EN$ (радиус и касательная), достаточно показать, что точки I, M, E, N лежат на одной окружности (с диаметром IN). Для этого достаточно показать равенство углов $\angle IMG = \angle INE = \angle CNL$.

Пусть углы треугольника ABC равны $\alpha = \angle A, \beta = \angle B, \gamma = \angle C$. Треугольник AIF равнобедренный (высота IF совпадает с медианой) с углом $\angle IAF = \frac{\alpha}{2}$ при основании, значит, из треугольника CNL имеем $\angle CNL = \pi - (\pi - \gamma) - \frac{\alpha}{2} = \gamma - \frac{\alpha}{2}$.

Аналогично, треугольник I равнобедренный с углом $\frac{\gamma}{2}$ при основании, а треугольник GBE равнобедренный с углом $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ при основании. Значит, из четырехугольника $AGMK$ можем найти $\angle IMG = \angle KMG = 2\pi - (\pi - \frac{\alpha+\gamma}{2}) - (\pi - \frac{\gamma}{2}) - \alpha = \gamma - \frac{\alpha}{2} = \angle CNL$, что и требовалось.

Критерии.

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. В социальной сети «ВТомате» зарегистрирован ровно миллион пользователей, некоторые из которых являются друзьями. Оказалось, что если пользователи A и B друзья, и у них d_1 и d_2 друзей соответственно, то $d_1 \cdot d_2 \leq 10000$. Владелец сети Паша Помидуров посмотрел, сколько друзей у каждого пользователя, и сложил все эти числа. Могло ли у него получиться число, большее ста миллионов?

Ответ: Нет.

Решение 1. Давайте сначала оставим только тех, кто дружит хоть с кем-нибудь, потому что те, у кого 0 друзей, не вносят вклада в посчитанную сумму. Пускай количества друзей

у этих людей это $a_1, a_2, \dots, a_n$, и S — сумма, посчитанная Пашей. Тогда по условию для любых двух друзей — i -го и j -го — справедливо, что $a_i \cdot a_j \leq 10000$. Прологарифмируем это неравенство (все a_i хотя бы 1). Получим, что $\ln a_i + \ln a_j \leq 2 \ln 100$. Просуммируем эти неравенства для всех пар друзей. Получим

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln a_i \leq 2E \ln 100,$$

где E — количество пар друзей в нашей сети. Заметим, что $2E = S$, потому что каждая дружба ровно 2 раза учтена в S . Значит мы имеем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln a_i \leq S \ln 100.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x \ln x$. Её вторая производная $f''(x) = \frac{1}{x}$, поэтому f выпукла вниз на $[1, +\infty)$. Тогда применяя неравенство Йенсена, имеем

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq n f\left(\frac{S}{n}\right) = S \ln\left(\frac{S}{n}\right).$$

Таким образом мы получили, что

$$S \ln 100 \leq S \ln\left(\frac{S}{n}\right),$$

откуда $S \leq 100n \leq 1000000000$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Давайте сначала оставим только тех, кто дружит хоть с кем-нибудь, потому что те, у кого 0 друзей, не вносят вклада в посчитанную сумму. Пускай количества друзей у этих людей это $a_1, a_2, \dots, a_n$, и S — сумма, посчитанная Пашей. Тогда по условию для любых двух друзей — i -го и j -го — справедливо, что $a_i \cdot a_j \leq 10000$. Зафиксируем индекс i и сложим неравенства из условия по всем j — друзьям i . Получим

$$\sum_{j \in N(i)} a_i a_j \leq 10000 a_i$$

($N(x)$ — множество всех друзей x). Разделим это неравенство на a_i . Получим

$$\sum_{j \in N(i)} a_j \leq 10000.$$

Теперь сложим эти неравенства по всем индексам i . Тогда каждое a_i войдет в эту сумму a_i раз — по одному за каждого друга i . Получим

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 10000n.$$

Но тогда

$$S = \sum_{i=1}^n a_i \leq n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \leq 100n.$$

(Первое неравенство это неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом.) Таким образом $S \leq 100n \leq 1000000000$, что и требовалось доказать.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Из небольшого среднего количества ребер в некоторых группах делается необоснованный вывод о небольшом среднем количестве ребер во всем графе — 0 баллов.
- Решение опирается на существование полного паросочетания, но доказательства его наличия нет — 0 баллов.