



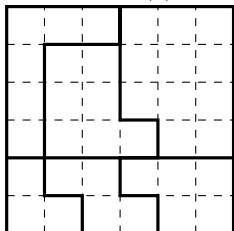
Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
4 класс



Решения

1. Разделите квадрат 6×6 клеток на шесть различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками. Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток.

Решение. Одно из решений приведено на рисунке.



Критерии. Если приведено любое верное решение — 7 баллов, неверное — 0 баллов.

Частые ошибки: одинаковые площади фигур или наличие прямоугольников 1×1 или 1×2 .

2. В племени Курумба неделя состоит из нескольких дней (не обязательно из семи). Вождь этого племени несколько раз отвечал на вопрос, какой сегодня день недели. Оказалось, что 15 сентября, 15 октября и ещё хотя бы в один день между этими датами он ответил «Тумба», 24 сентября — «Мумба», 30 сентября — «Лумба». А сколько дней в неделе у племени Курумба?

Ответ: 10.

Решение. Так как 15 сентября и 15 октября в племени один и тот же день недели, то 30 (столько дней от 15 сентября для 15 октября) делится на количество дней недели, а тогда возможное количество дней — 3, 5, 6, 10 или 15 (не 30, иначе бы между 15 сентября и 15 октября не было дня с таким же названием). Но 15 не делится на количество дней недели (иначе бы 30 сентября тоже была бы «Тумба»), а тогда количество дней — не 3 и не 5. Аналогично и 6 не делится на это количество (иначе 24 и 30 сентября были бы одинаковыми днями). Остаётся ответ 10.

Критерии.

- Если приведено полное решение (в том числе полный перебор) — 7 баллов.
- Доказано, что 15 не делится на число дней недели ИЛИ что 6 не делится ИЛИ (при решении перебором) забыт один вариант — 5 баллов.
- Если доказано, что 30 делится на число дней — 3 балла.
- Если решение неверное (в том числе полный перебор вариантов без доказательства про 30, в котором потеряно более, чем 1 вариант) — 0 баллов.

3. Находясь на пересечении Длинного проспекта и Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта. Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одного перекрёстка до следующего) за 8 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром, но обязательно на одном из перекрёстков. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно),

а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение?

Ответ: Не сможет.

Решение. Александр тратит чётное число минут, чтобы дойти до перекрёстка (любого). Динара тоже тратит чётное число минут на прохождение квартала, но ей ещё надо нечётное число раз перейти проспект, чтобы оказаться на противоположной стороне. Значит, Динаре нужно нечётное число минут, чтобы оказаться на перекрёстке с той же стороны проспекта, что и Александр. Таким образом, встретиться они вообще не смогут.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Соня поставила в каждую из клеток квадрата 3×3 рыцаря или лжеца (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Оказалось, что на доске есть как рыцари, так и лжецы, причём каждый из 9 людей может сказать фразу: «Больше половины моих соседей по стороне — рыцари!». Сколько рыцарей на доске?

Ответ: 6 рыцарей.

Решение.

Заметим, что если в углу стоит рыцарь, то в обоих соседних клетках тоже рыцари. Обратно: если в середине стороны стоит лжец, то оба его соседа, стоящих в углах, лжецы.

Теперь рассмотрим всевозможные варианты того, кем оказались люди в серединах сторон.

Вариант 1. Все люди, стоящие в серединах сторон — рыцари. Тогда во всех углах тоже рыцари, и в центре тоже должен быть рыцарь. Но тогда на доске нет ни одного лжеца.

Вариант 2. Ровно один человек в середине стороны — лжец. Пусть для определённости он находится в верхней строке. Тогда в верхней строке должны быть три лжеца. С другой стороны, углы нижней строки окружены рыцарями, а значит, в этих углах могут стоять только рыцари. Наконец, центральную клетку окружают три рыцаря и лжец, а значит, в ней стоит рыцарь.

Вариант 3. Хотя бы два человека в серединах смежных сторон (пусть это верхняя строка и правый столбец) — лжецы. Тогда вся верхняя строка и весь правый столбец состоит из лжецов. А значит, и в центральной клетке должен стоять лжец (среди его соседей уже есть два лжеца). А тогда и в середине нижней строки и левого столбца также стоят лжецы (у них уже два соседа лжецы). Оставшийся человек тоже должен быть лжецом. Но тогда нет ни одного рыцаря.

Вариант 4. В серединах сторон тоже есть два лжеца, но они на противоположных сторонах (допустим, сверху и снизу). Тогда в верхней и нижней строках исключительно лжецы. Но тогда и в остальных клетках должны быть лжецы, ибо каждая из них уже окружена двумя лжецами — вновь все оказались лжецами.

Итак, в единственном возможном способе (вариант 2) 6 рыцарей.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если забыт 1 случай при переборе ИЛИ забыто, что не могут быть все рыцари — 5 баллов.
- Рассмотрены только ситуации «рыцарь в углу и лжец в середине стороны» ИЛИ потеряно более 1 случая при переборе — 3 балла.
- Приведен только один пример и верный ответ — 0 баллов.

- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Петя умеет делать с числами две операции:

(а) увеличивать число на 6;

(б) вписывать 0 между двумя любыми цифрами числа.

Он хочет из числа 66 получить число 66666. Какое наименьшее количество операций ему для этого понадобится?

Ответ: 33 операции.

Решение. Опишем, как за 11 операций вставить 6 между предпоследней и последней цифрами. Для этого нужно вставить туда 0, а потом десять раз добавить 6. За три таких процедуры (итого понадобится 33 операции) получим число 66666.

Докажем, что менее чем за 33 операции мы не сможем добиться результата. Сделаем обратный ход: из числа можем вычесть 6, а если в этом числе стоит 0 (не первой и не последней цифрой), то мы его можем вычеркнуть. Изначально у нас число 66666, из которого мы хотим получить 66.

Первые десять операций однозначны — мы вычитаем 6. После этого мы можем либо вычеркнуть образовавшийся 0 и применить то же рассуждение к числу с меньшим количеством шестёрок, либо проигнорировать ноль и продолжить вычитать 6.

В последнем случае, чтобы получить хоть какой-то ноль (не на последнем месте), мы должны будем ещё 17 раз вычитать 6, и у нас окажется число 66504. И мы уже потратили 27 операций. Нетрудно заметить, что четырёх операций нам заведомо не хватит, чтобы получить 66.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Имеются незначительные ошибки в оценке — 5-6 баллов.

(в) Приведён верный ответ и алгоритм получения за это число шагов — 3 балла.

(г) Если решение неверное — 0 баллов.