



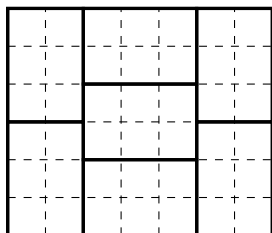
Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
4 класс



Решения

1. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×7 на семь одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника.

Решение. Решение приведено на рисунке.



Критерии.

- (а) Если приведено любое верное решение — 7 баллов.
- (б) Если решение неверное — 0 баллов.

2. Буратино выписал носом на песке 5 последовательных натуральных чисел. Могло ли среди цифр в этих числах оказаться ровно четыре единицы и три нуля? (Последовательные числа — это числа, каждое из которых больше предыдущего на 1, например: 323, 324, 325, 326, 327.)

Ответ: Да, могло.

Решение. Есть много примеров разного типа, например: 197, 198, 199, 200, 201; или: 1996, 1997, 1998, 1999, 2000; или: 708, 709, 710, 711, 712.

Критерии.

- (а) Если приведено любое верное решение — 7 баллов.
- (б) Если решение неверное — 0 баллов.

3. На острове по кругу расположены 22 поселения туземцев, а в центре круга находится хижина вождя. Однажды какие-то 9 поселений на острове захватили варвары. После этого из каждого поселения к вождю было послано по одному гонцу. Все гонцы сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что все туземцы правдивы, а варвары всегда врут. Если поселение захвачено, то гонец оттуда — точно варвар, а если нет, то гонец может быть как варваром, так и туземцем. Верно ли, что есть захваченное поселение, у которого оба соседа не захвачены?

Ответ: Да, верно.

Решение. Если бы существовали три захваченных поселения подряд, то варвар из среднего поселения, сказавший что оба соседних захвачены, сказал бы правду, что невозможно. Значит, рядом с каждым захваченным поселением либо одно, либо ни одного захваченного. Если всегда выполняется первый из этих случаев, то все захваченные поселения разбиваются на пары соседних. Но тогда захвачено четное количество, а по условию их 9. Значит, есть захваченное поселение, у которого нет захваченных соседей.

Критерии. Баллы за второй и третий критерий суммируются

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Доказано, что три захваченных города подряд быть не может — 5 баллов.
- (в) Сказано, что 9 - нечетное число, значит будет захваченное селение с двумя незахваченными соседями — 2 балла
- (г) Если решение неверное — 0 баллов.

4. У Кати есть бочки массой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 кг (по одной бочке каждой массы). В бочке массой 2 кг находится 18 кг пшена, а остальные пустые. Еще у Кати есть чашечные весы без гирь. Как Кате разделить пшено на три равные части? Высыпать за пределы бочек пшено нельзя.

Решение. Например, алгоритм может быть такой:

- (а) Пересыпаем из 2 в 6 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 11 кг, а в 6ке 7 кг
- (б) Пересыпаем Из 6 в 1 до равенства на весах. Тогда в 6ке оказывается 1кг, а в 1ке 6кг.
- (в) Пересыпаем Из 2 в 3 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 6 кг, а в 3ке 5кг.
- (г) Пересыпаем из 6ки в 3ку. В итоге в 1,2 и 3 оказывается по 6 кг, то есть мы смогли разделить на 3 равные части

Критерии.

- (а) Если приведен любой верный алгоритм — 7 баллов.
- (б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. На первом этаже большого дома находятся четыре гнома весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету за каждый этаж (независимо от того, сколько гномов в нём находится). Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифта можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже?

Ответ: 8 монет.

Решение.

Пример перевозок:

- (а) Перевозим гномов с весом 20, 30 и 50 на 3 этаж (тратится 2 монеты).
- (б) Гном с весом 20 спускается на 1 этаж (ещё 2 монеты).
- (в) Гном с весом 40 кг садится в лифт. Лифт едет до 2 этажа, гном с весом 20 выходит (1 монета).
- (г) Гном с весом 40 едет на 3 этаж (1 монета).
- (д) К нему садится гном с весом 50 кг, они едут на 4 этаж (1 монета), гном с весом 40 кг выходит, гном с весом 50 кг едет до своего этажа (1 монета). Итого 8 монет.

Оценка: Заметим, что мы не можем перевезти всех гномов с первого на второй этаж за один раз (потому что нужно перевезти $20+30+40+50=140$ кг). Значит, на этот перегон потребуется как минимум три монеты (два раза вверх и один раз вниз). Аналогично со второго на третий этаж мы должны перевезти как минимум $30+40+50=120$ кг, а значит, и на этот перегон нужно три монеты. Остальные перегоны проезжаются за одну монету, и получается $3+3+1+1=8$ — минимально возможное количество затраченных монет.

Критерии. Балла за 2-3 критерии суммируются

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Если приведен алгоритм развозки за 8 монет — 3 балла.
- (в) Доказано, что на 1 и 2 перегон они точно потратят минимум по 3 монеты — 3 балла
- (г) Дан верный ответ — 1 балл
- (д) Если решение неверное — 0 баллов.