



Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
5 класс



Решения

1. Петя умеет делать с числами две операции:

(а) увеличивать число на 18;

(б) вписывать цифру 8 между двумя любыми цифрами.

Как ему из числа 18 получить число 181716? Достаточно привести один способ.

Решение. Например, нужно три раза вставить 8 (получится число 18888), а затем 9046 раз прибавлять 18.

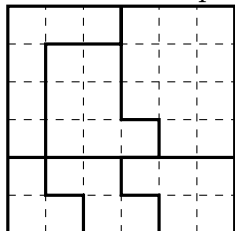
Есть и другие варианты, но ключевой момент — восьмёрку необходимо вставлять ровно три раза. В самом деле, прибавление 18 не меняет остатка при делении на 9. А если вставить 8, то остаток уменьшится на 1 по признаку делимости на 9 (если остаток был нулевой, то остаток полученного числа будет равен 8). А нам нужно получить из нулевого остатка остаток 6.

Критерии. Приведен любой верный алгоритм — 7 баллов, неверное решение — 0 баллов.

2. На какое максимальное количество различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками, можно разделить квадрат 6×6 клеток? Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток.

Ответ: на 6 частей.

Решение. Пример такого разрезания приведён на рисунке.



Докажем, что больше шести частей сделать нельзя. Упорядочим части по возрастанию. Наименьшая возможная площадь одной части — три клетки (если у нас будет одно- или двуклеточная часть, то это обязательно прямоугольник). Итак, наименьшая часть содержит не менее 3 клеток, следующая по величине — не менее 4, следующая не менее 5, и т.д. Если частей хотя бы 7, то они занимают не менее $3+4+5+6+7+8+9=42$ клетки, а всего у нас 36 клеток. Противоречие.

Критерии. Баллы за оценку и пример суммируются

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если записана оценка — 5 баллов.

(в) Если записана оценка, но не пояснено, почему 1×1 и 1×2 быть не могут — 3 балла.

(г) Если приведен пример разделения на 6 частей — 2 балла.

(д) Если решение неверное — 0 баллов.

3. Находясь на пересечении Длинного проспекта и 1-й Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта.

Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одной Поперечной улицы до Поперечной со следующим номером) за 9 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром на перекрёстке Длинного проспекта и 51-й Поперечной улицы, где находится её любимое кафе. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно), а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение? **Ответ:** Не сможет.

Решение. Чтобы дойти до перекрёстка проспекта и 51-й улицы, Александр потратит чётное число минут (ему нужно пройти 50 кварталов). Динара тратит чётное число минут на прохождение каждого квартала, но ей ещё надо нечётное число раз перейти улицу, чтобы оказаться на противоположной стороне. Значит, Динаре нужно нечётное число минут, чтобы оказаться на перекрёстке с той же стороны проспекта, что и Александр. Таким образом, встретиться они в указанной точке не смогут.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Соня поставила в каждую из клеток квадрата 3×3 рыцаря или лжеца (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Оказалось, что на доске есть как рыцари, так и лжецы, причём каждый из 9 людей может сказать фразу: «Больше половины моих соседей по стороне — рыцари!». Сколько рыцарей на доске?

Ответ: 6 рыцарей.

Решение. Заметим, что если в углу стоит рыцарь, то в обоих соседних клетках тоже рыцари. Обратно: если в середине стороны стоит лжец, то оба его соседа, стоящих в углах, лжецы.

Теперь рассмотрим всевозможные варианты того, кем оказались люди в серединах сторон. Вариант 1. Все люди, стоящие в серединах сторон — рыцари. Тогда во всех углах тоже рыцари, и в центре тоже должен быть рыцарь. Но тогда на доске нет ни одного лжеца.

Вариант 2. Ровно один человек в середине стороны — лжец. Пусть для определённости он находится в верхней строке. Тогда в верхней строке должны быть три лжеца. С другой стороны, углы нижней строки окружены рыцарями, а значит, в этих углах могут стоять только рыцари. Наконец, центральную клетку окружают три рыцаря и лжец, а значит, в ней стоит рыцарь.

Вариант 3. Хотя бы два человека в серединах смежных сторон (пусть это верхняя строка и правый столбец) — лжецы. Тогда вся верхняя строка и весь правый столбец состоит из лжецов. А значит, и в центральной клетке должен стоять лжец (среди его соседей уже есть два лжеца). А тогда и в середине нижней строки и левого столбца также стоят лжецы (у них уже два соседа лжецы). Оставшийся человек тоже должен быть лжецом. Но тогда нет ни одного рыцаря.

Вариант 4. В серединах сторон тоже есть два лжеца, но они на противоположных сторонах (допустим, сверху и снизу). Тогда в верхней и нижней строках исключительно лжецы. Но тогда и в остальных клетках должны быть лжецы, ибо каждая из них уже окружена двумя лжецами — вновь все оказались лжецами.

Итак, в единственном возможном способе (вариант 2) 6 рыцарей.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.

- Если забыт 1 случай при переборе ИЛИ забыто, что не могут быть все рыцари — 5 баллов.
- Рассмотрены только ситуации «рыцарь в углу и лжец в середине стороны» ИЛИ потеряно более 1 случая при переборе — 3 балла.
- Приведен только один пример и верный ответ — 0 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Дано число $n < 100$. Известно, что числа от 1 до n разбиваются на пары, в которых одно число делится на другое. При каком максимальном n это возможно?

Ответ: $n = 10$.

Решение. При $n = 10$ разбиение на пары такое: 1-7, 2-6, 3-9, 4-8, 5-10.

Докажем, что при $n > 10$ требование задачи выполнить невозможно. Очевидно, n должно быть чётным (иначе числа не разобьются на пары). Если $n \geq 11$, то рассмотрим числа 7 и 11 — это простые числа, большие $n/2$, но меньшие n . Одно из них может быть в паре с 1, а второе должно быть в паре с числом, ему кратным. Значит, в этом случае $n \geq 14$ (это наименьшее число, кратное 7 или 11 и не равное им). Но если $n \geq 14$, то появляются аналогичные пары 11 и 13, после чего $n \geq 22$. Но в этом случае появляются аналогичные пары — 17 и 19, после чего $n \geq 34$. Далее подойдут пары 29 и 31 (тогда $n \geq 58$), пары 43 и 53 (тогда $n \geq 86$), пары 79 и 83, и тогда $n > 100$, чего не должно быть по условию задачи.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Приведена идея о том, что простых числа, больших половины n , не должно быть более одного — 5 баллов.
- Есть незначительные ошибки в оценке или недостаточное объяснение и дан верный ответ — 5 баллов.
- Приведен верный ответ и пример разбиения на пары — 2 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.