



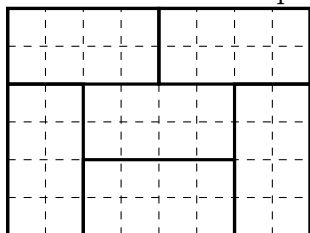
Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
5 класс



Решения

1. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×8 на шесть одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника.

Решение. Решение приведено на рисунке.



Критерии.

- (а) Приведено любое верное разрезание — 7 баллов
- (б) Приведено неверное решение — 0 баллов

2. У Кати есть бочки массой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 кг (по одной бочке каждой массы). В бочке массой 2 кг находится 18 кг пшеницы, а остальные пустые. Еще у Кати есть чашечные весы без гирь. Как Кате разделить пшеницу на три равные части? Высыпать за пределы бочек пшеницу нельзя.

Решение.

Например, алгоритм может быть такой:

- (а) Пересыпаем из 2 в 6 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 11 кг, а в 6ке 7 кг
- (б) Пересыпаем Из 6 в 1 до равенства на весах. Тогда в 6ке оказывается 1кг, а в 1ке 6кг.
- (в) Пересыпаем Из 2 в 3 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 6 кг, а в 3ке 5кг.
- (г) Пересыпаем из 6ки в 3ку. В итоге в 1,2 и 3 оказывается по 6 кг, то есть мы смогли разделить на 3 равные части.

Критерии.

- (а) Если приведен любой верный алгоритм — 7 баллов.
- (б) Если решение неверное — 0 баллов.

3. На острове по кругу расположены сто селений туземцев. В центре круга находится хижина Вождя. Однажды некоторые селения на острове захватили варвары. После этого из каждого селения к вождю было послано по одному гонцу, и все они сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что туземцы будут говорить ему только правду, а варвары — только врать. Также Вождь понимает, что если селение захвачено, то его гонец — точно варвар, а если селение не захвачено, его гонец может быть как варваром, так и туземцем. Разведка донесла Вождю, что на его острове захвачена ровно половина селений, и у каждого захваченного селения хотя бы одно из соседних тоже захвачено (эта информация достоверная). Сколько туземцев могло быть среди посланных вождю гонцов? Приведите все варианты и докажете, что других нет.

Ответ: От 0 до 24.

Решение. Три захваченных села подряд быть не могут, иначе варвар из среднего села скажет правду. Но по условию и одиночное захваченное село быть не могло, а тогда они идут парами. Пусть из не захваченного села послан туземец. Тогда оба соседних с ним села захвачены. Если несколько не захваченных сел стоят подряд, то из них не могли быть посланы туземцы, так как у каждого такого села есть не захваченный сосед. То есть нас интересуют только не захваченные села, у которых оба соседа захвачены. Заметим, что не захваченных селений 50. Их нужно разделить на 25 групп (группы между двойками захваченных). 25 туземцев быть не может - тогда нужны были бы все 25 групп по 1 селу, тогда сел 25, а нам нужно 50. Остальные варианты от 0 до 24 туземцев возможны. Примеры: 0 туземцев: группы 2-2-....-2 1 туземец: группы 1-2-....-2-3 2 туземца: группы 1-1-2-....-2-4 и так далее 24 туземца: группы 1-1-1-....-1-26

Критерии. Баллы за критерии 2-5 суммируются

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Приведены примеры расстановки селений на 0-24 рыцаря — 2 балла.
- (в) Доказано, что рыцарь может выехать только из незахваченного селения, окруженного захваченными — 2 балла
- (г) Доказано, что захваченные селения разбиваются на изолированные пары — 2 балла
- (д) Объяснено, почему не может быть 25 рыцарей — 1 балл
- (е) Если решение неверное — 0 баллов.

4. Даны пять последовательных натуральных чисел, каждое из которых больше 30. Для каждого числа на доску выписали количество его натуральных делителей (например, у числа 49 три делителя: 1, 7, 49). Может ли сумма пяти выписанных на доску чисел быть меньше 20?

Ответ: Не может.

Решение. Пять раз выписана единица. Как минимум два раза выписана двойка, как минимум по одному разу — тройка, четвёрка и пятёрка. То есть уже минимум 10 чисел. Кроме них, выписаны «парные» числа (т.е. число, при умножении на которое получается первоначальное число), и эти парные числа должны быть больше 5 (то есть они не учтены при выписывании единиц, двоек, троек, четвёрок и пятёрок), так как первоначальные числа больше 30 (т.е. при делении на 5 и менее получается больше 6). Это ещё 10 чисел. Итого написано не менее 20 чисел.

Критерии. Баллы за критерии суммируются

- (а) Показано, что минимум по 2 делителя на число есть (это число и 1) — 1 балл
- (б) Сказано, сколько делителей возникает из-за 3ки, 5ки, 2ки, 4ки — 4 балла
- (в) Объяснено, почему никакие делители из посчитанных не равны — 2 балла
- (г) Дано неверное решение — 0 баллов

5. На первом этаже большого дома находятся четверо гномов весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету с каждого гнома за каждый этаж. Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифт можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже?

Ответ: 14 монет.

Решение. Пример перевозок:

- (а) Перевозим гномов с весом 20, 30 и 50 на 3 этаж (тратится 6 монет).
- (б) Гном с весом 20 спускается на 1 этаж (ещё 2 монеты).
- (в) Гном с весом 40 кг садится в лифт. Лифт едет до 2 этажа (2 монеты), гном с весом 20 выходит.
- (г) Гном с весом 40 едет на 3 этаж (1 монета).
- (д) К нему садится гном с весом 50 кг, они едут на 4 этаж (2 монеты), гном с весом 40 кг выходит, гном с весом 50 кг едет до своего этажа (1 монета). Итого 14 монет.

Оценка. Заметим, что мы не можем перевезти всех гномов с первого на второй этаж за один раз (потому что нужно перевезти $20+30+40+50=140$ кг). Значит, на этот перегон потребуется как минимум шесть монет (каждого гнома нужно поднять вверх, но один ещё должен спуститься и снова подняться). Аналогично со второго на третий этаж мы должны перевезти как минимум $30+40+50=120$ кг, а значит, на этот перегон нужно как минимум 5 монет. Перегон с третьего до четвёртого этажа проезжается за две монеты, с четвёртого до пятого — за одну монету. Итого минимум $6+5+2+1=14$ — минимально возможное количество затраченных монет.

Критерии. Балла за 2-5 критерии суммируются

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Если приведен алгоритм развозки за 14 монет — 3 балла.
- (в) Доказано, что на 1 перегон они точно потратят минимум 6 монет — 2 балла
- (г) Доказано, что на 2 перегон потратится минимум 5 монет — 1 балл
- (д) Дан верный ответ — 1 балл
- (е) Если решение неверное — 0 баллов.