



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
6 класс



Решения

1. Петя умеет делать с числами две операции:

(а) увеличивать число на 18;

(б) вписывать цифру 8 между двумя любыми цифрами.

Как ему из числа 18 получить число 181716? Достаточно привести один способ.

Решение. Например, нужно три раза вставить 8 (получится число 18888), а затем 9046 раз прибавлять 18.

Есть и другие варианты, но ключевой момент — восьмёрку необходимо вставлять ровно три раза. В самом деле, прибавление 18 не меняет остатка при делении на 9. А если вставить 8, то остаток уменьшится на 1 по признаку делимости на 9 (если остаток был нулевой, то остаток полученного числа будет равен 8). А нам нужно получить из нулевого остатка остаток 6.

Критерии. Верный способ — 7 баллов.

В способе есть ошибка, но легко доделывается — 4 балла.

2. В классе 12 человек, каждый дружит с шестью другими. Они провели турнир по теннису, в котором каждый сыграл с каждым по разу. Ничьих в теннисе не бывает. Докажите, что кто-то из детей одержал больше побед над друзьями, чем над остальными ребятами.

Решение. Допустим противное. Пусть у каждого человека побед над друзьями не больше, чем побед над недругами. Тогда и всего количество побед друга над другом не больше, чем количество побед недруга над недругом. Но первое количество — это количество пар друзей (а это $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36$), потому что в каждой паре друзей один выиграл у другого. А вторая сумма — количество пар недругов (а это $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$), и мы пришли к противоречию.

Критерии. Всё сделано верно — 7 баллов.

Есть арифметическая ошибка — минус 2 балла.

3. В ряд написано несколько натуральных чисел (больше двух), самое левое из них равно сумме всех остальных. Некоторые из чисел увеличили на 10, а остальные уменьшили на 10. Снова получился ряд из натуральных чисел, но теперь самое правое число равно сумме остальных. Сколько чисел могло быть написано?

Ответ: 3 числа.

Решение. Пусть изначально выписаны числа: $x, a_1, a_2, \dots, a_n, y$.

Тогда по условию $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n + y$, то есть $x - y = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

После изменения чисел на 10 получили на доске: $x \pm 10, b_1, b_2, \dots, b_n, y \pm 10$.

Тогда аналогично первому случаю получаем: $y \pm 10 - (x \pm 10) = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Сумма $b_1, b_2, \dots, b_n$ принимает наибольшее значение, если в левой части равенства после раскрытия скобок обе десятки со знаком $+$. Это можно записать так:

$$y - x + 20 \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Складывая результирующее равенство первого случая, со вторым неравенством, получаем:

$$x - y + (y - x + 20) \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

$$20 \geq (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n).$$

В сумме $a_i + b_i$ два натуральных слагаемых, отличающихся на 10. Значит, $a_i + b_i \geq 12$. Следовательно, $n \leq 1$, и в последовательности ровно три числа.

Такая последовательность из трех чисел существует:

$$16, 15, 1.$$

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 4 балла.

4. Вдоль кольцевой дороги длиной 200 км через каждый километр стоят столбы. У некоторых столбов стоит по инспектору (а больше инспекторов нет). При этом на расстоянии ровно 2 км от любого столба есть как инспектор, так и столб без инспектора. Инспектор расслаблен, если и ровно в километре от него, и ровно в трёх километрах от него есть другой инспектор. Сколько всего расслабленных инспекторов?

Ответ: 50.

Решение. Покрасим столбы без инспекторов в белый цвет, а с инспекторами — в черный. Заметим, что любые два столба на расстоянии 4 км — разноцветные (это два столба на расстоянии 2 км от столба ровно посередине между ними). Поэтому любые два столба на расстоянии 8 км — одноцветные, то есть раскраска столбов повторяется через 8.

Рассмотрим два черных столба на расстоянии 2 км. Если между ними стоит черный столб (а в двух километрах от него стоит еще один), то мы находим четыре подряд черных столба, значит, следом за ними идут четыре подряд белых столба, а далее раскраска повторяется (всего 25 белых и 25 черных четверок). В каждой четверке два средних инспектора не расслаблены (в трех километрах от них никого нет), а два крайних расслаблены, всего получаем $2 \cdot 25 = 50$ расслабленных инспекторов.

Пусть между черными столбами на расстоянии 2 км стоит белый столб (а в 2 км от него с какой то стороны есть черный). Получаем четверку ЧБЧЧ, за ней следует «противоположная» четверка: ЧБЧБЧББ и далее раскраска повторяется (25 таких восьмерок по кругу). Видим, что в каждой такой восьмерке два средних инспектора расслаблены, а два крайних — нет (соседние с ними столбы — белые), значит, снова получается $2 \cdot 25 = 50$ расслабленных инспекторов.

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 3 балла.

5. Некоторые из натуральных чисел от 1 до 12 000 000 разбили на пары так, что в каждой паре одно из чисел делится на другое. Докажите, что не менее миллиона чисел остались без пары.

Решение. Отметим среди указанных чисел все нечетные числа, большие 6 000 000 — их ровно 3 000 000. На них не делятся никакие другие наши числа (кратные им числа превышают $2 \cdot 6\,000\,000 = 12\,000\,000$), значит, парное к любому отмеченному числу должно быть его делителем и отличаться от него минимум в три раза (в два не может в силу нечетности отмеченных). Значит, любое число, стоящее в паре с каким то из отмеченных, не превосходит $\frac{12\,000\,000}{3} = 4\,000\,000$ и, очевидно, нечетно. Таких чисел ровно 2 000 000, значит, как минимум $3\,000\,000 - 2\,000\,000 = 1\,000\,000$ отмеченных чисел остались без пары.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.