

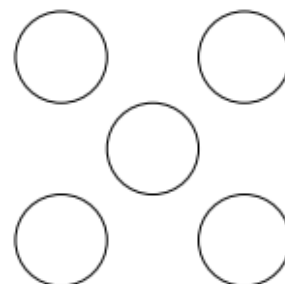


Олимпиада  
Юношеской математической школы  
2 отборочный тур  
5 октября 2024 года  
6 класс



Решения

1. Серёжа и Настя играют в игру, по очереди расставляя натуральные числа от 1 до 5 в ячейки  $X$ -образной диаграммы справа, начинает Настя. В каждой ячейке может стоять только одно число, в разных ячейках должны стоять разные числа. Сможет ли Настя играть так, чтобы в конце игры суммы чисел в диагоналях были не равны между собой?



**Ответ:** Да, сможет.

**Решение.** Пусть Настя поставит в центральную ячейку число 5. В конце игры сумма чисел в диагоналях будет равна в том и только том случае, когда в одной из диагоналей будут числа 1, 4, 5, а в другой — 2, 3, 5. Пусть без ограничения общности Серёжа поставил следующее своё число в левую верхнюю ячейку. Тогда Настя может поставить такое число в правую нижнюю ячейку, что в заполненной диагонали будет тройка чисел, не совпадающая ни с одной из троек 1, 4, 5 и 2, 3, 5. Следовательно, Настя сможет сделать так, чтобы суммы чисел в диагоналях были не равны между собой.

**Критерии.** Полное решение — 7 баллов

Есть мысли про четное число по центру, но не доказано, что суммы отличаются — 5 баллов.

2. Семь детей разной силы образуют команды из двух человек (каждый может состоять в нескольких командах). Нельзя, чтобы в одной из команд каждый участник был сильнее, чем каждый в какой-то другой из команд. (Например, если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 4-й и 6-й, то это плохо; но если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 3-й и 6-й, то это допустимо.) Приведите пример, как дети могли образовать 15 команд.

**Решение.** Пронумеруем детей. Пусть 1 — самый сильный, второй по силе — 2, и так далее, самый слабый под номером 7. Составим команды. Сначала составим всевозможные команды, в которых первый ребенок 1, 2 или 3, а второй ребенок 5, 6 или 7. Таких пар 9. Еще возьмем всевозможные пары, в которых есть 4 ребенок. Таких пар 6.

Получилось 15 пар. В каждой паре есть ребенок, который по силе четвертый или сильнее, и есть ребенок, который четвертый или слабее. Значит, данный пример подходит.

**Критерии.**

Верный пример — 7 баллов

Неверный пример — 0 баллов

3. На доску  $20 \times 20$  поставили 20 не бьющих друг друга ферзей. Докажите что в каждом угловом квадрате  $10 \times 10$  стоит хотя бы один ферзь.

**Решение.** Отметим, что если на доске  $20 \times 20$  стоит 20 ферзей, то в любой строке и в любом столбце стоит ровно один ферзь.

Предположим, что в каком-то угловом квадрате  $10 \times 10$  нет ни одного ферзя. Повернем доску так, чтобы этим квадратом оказался левый верхний. Тогда в верхних 10 строках

все ферзи стоят в правом квадрате  $10 \times 10$ . Аналогично, в первых 10 столбцах все ферзи стоят в нижнем квадрате  $10 \times 10$ . Тогда все 20 ферзей стоят в правом верхнем и левом нижнем квадратах  $10 \times 10$ .

19 диагоналей, идущих из правого верхнего угла в левый нижний, покрывают оба квадрата  $10 \times 10$ . Но на каждой диагонали стоит не более одного ферзя. Противоречие.

#### Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. На доске в ряд написано 12 единиц. Между некоторыми из них можно поставить знак «+», а можно не ставить. Сколькими способами можно расставить плюсы так чтобы сумма делилась на 30?

**Ответ:** 55.

**Решение.** Чтобы число делилось на 30, оно должно заканчиваться на 0. В зависимости от того, сколько плюсов поставить, может получиться от 1 до 12 слагаемых. Все слагаемые заканчиваются на 1. Значит, получить 0 на конце можно, сложив только 10 слагаемых.

Сумма состоит из 10 слагаемых, если нету "+" ровно в двух местах. В этих случаях сумма равна

$$111 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 120 \text{ или } 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 30.$$

В обоих случаях сумма делится на 30.

Найдем число способов расставить 9 знаков "+" в 11 промежутках. Посмотрим на левую позицию, в которой нету "+". Если это самая левая позиция, то есть 10 вариантов не ставить "+" еще в одном месте. Если это вторая слева позиция, то есть 9 вариантов не ставить "+" еще в одном месте. И так далее. Всего получаем

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 \text{ способов.}$$

#### Критерии.

- (а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
- (б) Не объяснено почему при 9 плюсах и двух 11 именно 45 вариантов — 5 баллов.
- (в) Если решение неверное — 0 баллов.

5. Вася выписал несколько пар натуральных чисел так, что любое число выписано не более двух раз. Петя переписал в блокнот некоторые из Васиных пар так, что любое число, встречавшееся у Васи, встречается у Пети ровно на один раз меньше. Всегда ли Вася может назвать несколько натуральных чисел так, чтобы в каждой из написанных им пар было названо ровно одно число?

**Ответ:** Да, всегда.

#### Решение.

Покажем, как Вася всегда сможет это сделать.

Сначала отметим, что ни одна пара не состоит из двух одинаковых чисел. В противном случае Петя не может ее взять, хотя должен взять пару с данным числом.

Посмотрим на какое-нибудь число  $a_1$ , которое выписано ровно один раз. С ним в паре записано число  $a_2$ . Если число  $a_2$  состоит еще в какой-то паре с числом  $a_3$ , посмотрим в какой паре есть еще  $a_3$  и так далее пока не дойдем до числа  $a_n$ , которое состоит в одной паре. Получим последовательность:

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_n.$$

В этой последовательности любые два соседние числа состоят в одной паре. Причем больше эти числа ни в каких парах не состоят. Петя смог взять некоторые пары так, что в них  $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  встречаются по разу. Тогда это могли быть только пары:

$$(a_2, a_3), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Следовательно,  $n$  — четно. Значит, Вася может покрасить числа  $a_1, a_3, \dots, a_{n-1}$  и эти числа будут встречаться в каждой из рассмотренных пар, причем ровно по одному в паре. Будем действовать таким образом, пока не останутся только числа которые встречаются два раза.

Возьмем число, которое встречается два раза и будем аналогично выписывать числа в ряд так, чтобы два соседние числа были в одной паре. Отметим, что в этот раз в конце мы должны получить число с которого мы начинали (раз оно встречалось дважды).

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1.$$

Петя может взять некоторые пары так чтобы каждое число встречалось один раз. Это можно сделать только если  $k$  четно. Значит, Вася опять может покрасить числа  $a_1, a_3, \dots, a_{k-1}$  и в каждой из рассмотренных пар будет встречаться ровно одно из этих чисел.

### Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.