



Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
7 класс



Решения

1. На доске в ряд выписаны числа $1, 2, \dots, 8$, каждое покрашено в красный цвет. За один шаг Алина может выбрать три различных числа такие, что сумма двух из них равна третьему, и поменять у этих трёх чисел цвет (с красного на синий и наоборот). Алина хочет сделать все числа синими. Помогите Алине осуществить желаемое.

Решение. Перекрасим тройки $(1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (1, 7, 8)$. Тогда каждое число поменяло цвет нечётное число раз, то есть стало синим.

Критерии. Все сделано верно — 7 баллов.

2. В 7 классе учится восемь школьников разного роста. Учитель хочет расставить всех учеников в ряд так, чтобы для каждого ученика было выполнено хотя бы одно из условий:

- справа и слева от этого ученика поровну школьников выше его;
- справа и слева от этого ученика поровну школьников ниже его.

Докажите, что у учителя есть ровно два способа так расставить учеников.

Решение. Пронумеруем школьников от 1 до 8 в порядке возрастания роста. Рассмотрим самого левого школьника. Слева от него ноль школьников выше и ниже его. Значит, это школьник с номером 1 или 8. Аналогично самый правый школьник имеет номер 1 или 8. Разберём случай, когда школьник с номером 1 стоит слева, а с номером 8 — справа. Рассмотрим второго школьника слева. Слева от него нет школьника выше, а справа есть хотя бы один (школьник с номером 8). Значит, слева и справа от него должно быть поровну школьников ниже его. Слева от него такой школьник только один, а значит, и справа. То есть второй школьник слева имеет номер 3. Аналогично второй школьник справа имеет номер 6. То есть расстановка имеет такой вид: $13abcd68$.

Если $a = 2$, то слева и справа от него будет разное число школьников ниже его и разное число школьников выше его. Значит, $a \geq 4$. Слева от a нет школьника выше, а справа есть хотя бы один (школьник с номером 8). Значит, слева и справа от него должно быть поровну школьников ниже его. То есть по два школьника. Значит, $a = 5$. Аналогично доказывается, что $d = 4$. Тогда возможна одна из двух расстановок: 13527468 и 13572468 . В первой расстановке не соблюдается условие для числа 2, а вторая подходит под условие. Значит, в этом случае возможно только одна расстановка.

В случае, когда школьник с номером 1 стоит справа, а с номером 8 — слева, аналогично возможна только одна расстановка. Значит, всего расстановок, подходящих под условие, две.

Критерии. Доказано, что самый низкий и самый высокий стоят по краям — 1 балл. Найдены итоговые варианты — 1 балл.

3. Федя выписал на доску 10-значное число-палиндром, в записи которого нет нулей. Серёжа перебрал все способы вычеркнуть 8 цифр из выписанного числа и сложил все 45 полученных двухзначных чисел. Могла ли полученная сумма оказаться простым числом? Напомним, что число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо.

Ответ: Нет.

Решение. Пусть наше число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$, где $a_1 = a_{10}$, $a_2 = a_9$, $a_3 = a_8$, $a_4 = a_7$, $a_5 = a_6$. Заметим, что числа $\overline{a_1a_{10}}$, $\overline{a_2a_9}$, $\overline{a_3a_8}$, $\overline{a_4a_7}$, $\overline{a_5a_6}$ делятся на 11, так как в них обе цифры равны. Все остальные получающиеся двухзначные числа разбиваются на пары $\overline{a_ia_j}$ и $\overline{a_{11-j}a_{11-i}}$. Например, числу $\overline{a_1a_2}$ сопоставлено число $\overline{a_9a_{10}}$, а числу $\overline{a_2a_7}$ сопоставлено число $\overline{a_4a_9}$. Заметим, что в каждой паре сумма чисел делится на 11. Действительно, $\overline{a_ia_j} + \overline{a_{11-j}a_{11-i}} = 10a_i + a_j + 10a_{11-j} + a_{11-i} = 11a_i + 11a_j$. Значит, сумма всех рассматриваемых двухзначных чисел делится на 11 и больше 11. Значит, она не может быть простым числом.

Критерии.

(а) Забыты числа a_ia_{11-i} — дыра в 2 балла.

(б) Арифметическая ошибка, но идея верная — 6 баллов.

4. Даны натуральные числа $p > 1$ и q . Обязательно ли найдутся различные неотрицательные целые числа a, b, c, d такие, что

$$\left(\frac{p}{q} + a\right) \left(\frac{p}{q} + b\right) = \left(\frac{p}{q} + c\right) \left(\frac{p}{q} + d\right)?$$

Ответ: да.

Решение. Положим $a = 0$, $b = p + q + 1$, $c = 1$, $d = p$. Так как $p > 1$, то все эти числа различные. Тогда левая часть равна

$$\left(\frac{p}{q} + a\right) \left(\frac{p}{q} + b\right) = \left(\frac{p}{q} + 0\right) \left(\frac{p}{q} + p + q + 1\right) = \frac{p(p + pq + q^2 + q)}{q^2} = \frac{p^2 + p^2q + q^2p + pq}{q^2},$$

а правая часть

$$\left(\frac{p}{q} + c\right) \left(\frac{p}{q} + d\right) = \left(\frac{p}{q} + 1\right) \left(\frac{p}{q} + p\right) = \frac{(p + q)(p + pq)}{q^2} = \frac{p^2 + p^2q + qp + q^2p}{q^2}.$$

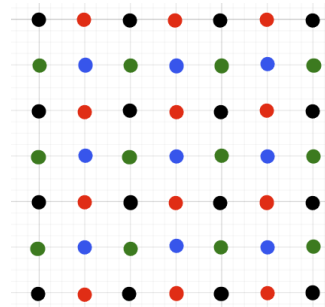
Два полученных выражения равны, что и требовалось доказать.

Критерии. Если пример имеет одинаковые числа, но можно без труда поправить на верный — 6 баллов.

5. В каждой клетке квадрата 6×6 разрешается провести ноль, одну или две диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести так, чтобы никакие три из них не имели общей точки?

Ответ: 42.

Решение. Покрасим вершины клеток в 4 цвета, как показано на рисунке. Тогда диагонали бывают двух типов: те, которые соединяют вершины чёрного и синего цветов и те, которые соединяют вершины цветов красного и зелёного. По условию в каждой вершине синего и зелёного цветов сходится не больше двух диагоналей, причём вершин синего цвета 9 штук, а зелёного — 12 штук. Значит, диагоналей не больше $2 \cdot (9 + 12) = 42$.



Пример изображен на картинке справа.
То есть ответ 42.

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 3 балла.

