

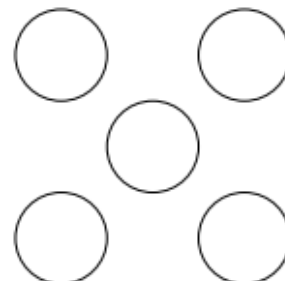


Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
7 класс



Решения

1. Серёжа и Настя играют в игру, по очереди расставляя натуральные числа от 1 до 5 в ячейки X -образной диаграммы справа, начинает Настя. В каждой ячейке может стоять только одно число, в разных ячейках должны стоять разные числа. Сможет ли Настя играть так, чтобы в конце игры суммы чисел в диагоналях были не равны между собой?



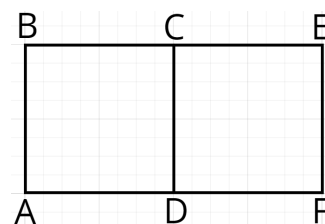
Ответ: Да, сможет.

Решение. Пусть Настя поставит в центральную ячейку число 5. В конце игры сумма чисел в диагоналях будет равна в том и только том случае, когда в одной из диагоналей будут числа 1, 4, 5, а в другой — 2, 3, 5. Пусть без ограничения общности Серёжа поставил следующее своё число в левую верхнюю ячейку. Тогда Настя может поставить такое число в правую нижнюю ячейку, что в заполненной диагонали будет тройка чисел, не совпадающая ни с одной из троек 1, 4, 5 и 2, 3, 5. Следовательно, Настя сможет сделать так, чтобы суммы чисел в диагоналях были не равны между собой.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

Есть мысли про четное число по центру, но не доказано, что суммы отличаются — 5 баллов.

2. На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DCEF$, как показано на картинке. По прямоугольнику $ABEF$ с постоянной скоростью по часовой стрелке бежит Крош, а по квадрату $ADCB$ с постоянной скоростью против часовой стрелки бежит Ёжик. Могло ли так случиться, что ни в какой момент времени Крош и Ёжик не встретятся, если они бегают бесконечно долго?



Ответ: Нет, не могло.

Решение. Если скорость Кроша не меньше скорости Ёжика, то рассмотрим момент, когда Ёжик окажется в точке C . Чтобы Ёжику дойти до точки D , ему нужно пройти половину периметра прямоугольника $ABEF$. Так как скорость Кроша не меньше, то Крош за это же время пройдёт не меньше половины периметра прямоугольника $ABEF$. То есть за это время он обязательно побывает в левой половине прямоугольника $ABEF$. А так как Ёжик и Крош движутся в разных направлениях, то они обязательно встретятся.

Если же скорость Кроша меньше скорости Ёжика, то рассмотрим момент, когда Крош окажется в точке D . За время, пока Крош пройдет левую половину прямоугольника $ABEF$, Ёжик пройдет расстояние не меньше, чем DC . Значит, за это время он обязательно побывает в левой половине прямоугольника $ABEF$. А так как Ёжик и Крош движутся в разных направлениях, то они обязательно встретятся.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Разобран один из случаев — 2 балла

3. Все клетки нечётных столбцов доски 8×8 покрашены в чёрный цвет, а все клетки чётных столбцов — в белый. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых больше белых клеток, или тех, в которых больше чёрных клеток?

Ответ: Способов поровну.

Решение. Сопоставим каждому способу добраться из левой нижней угловой клетки в правую верхнюю другой способ, получающийся из данного симметрией относительно центра квадрата 8×8 . Данное соответствие разбило все способы на пары и «особые» способы, которые при симметрии перейдут сами в себя. Заметим, что при симметрии относительно центра квадрата 8×8 чёрные клетки переходят в белые, и наоборот. Следовательно, во всех «особых» способах чёрных и белых клеток поровну, а в каждой паре способов, симметричных друг другу, количество белых и чёрных клеток в одном способе соответственно равно количеству чёрных и белых клеток в другом способе. Следовательно, в каждой паре, а значит, и в целом, способов, в которых белых клеток больше, и способов, в которых чёрных клеток больше, поровну.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) При симметрии забыты «особые пути» — 3 балла.

4. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наибольший делитель, отличный от самого числа, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось более 9500 различных чисел?

Ответ: Нет.

Решение. Если число n чётное, то есть $n = 2k$, то его наибольший делитель равен k . Следовательно, сумма числа n и его наибольшего делителя равна $3k = \frac{3}{2}n$, то есть делится на 3. Если же число n нечётное, то и его наибольший делитель нечётный и не превосходит $\frac{n}{3}$. Следовательно, их сумма чётная и не превосходит $\frac{4}{3}n$.

Значит, среди выписанных чисел на доску встречаются только числа, которые или делятся на 3 и не превосходят $\frac{3}{2} \cdot 10000 = 15000$, или делятся на 2 и не превосходят $\frac{4}{3} \cdot 9999 = 13332$. Чисел первого вида $15000/3 = 5000$, а чисел второго вида $13332/2 = 6666$. Но среди чисел второго вида треть (2222) делится на 3, то есть они посчитаны и там, и там. Следовательно, всего чисел, выписанных на доску, не более $5000 + 6666 - 2222 = 9444$, что меньше 9500.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

5. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Докажите, что можно выбрать 29 человек и выстроить их в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Решение. Будем строить этот ряд по очереди, постепенно удлиняя его. В начале возьмём любых трёх человек, где один знает остальных двоих, — поставим его между ними. Теперь пусть мы уже построили ряд $A_1, A_2, \dots, A_n$, где A_i и A_{i+1} знают друг друга для любого $1 \leq i < n$. Если $n = 29$, то задача решена. Пусть $n < 29$, а оставшиеся люди — это B, C и, возможно, кто-то ещё. Рассмотрим четвёрку людей A_1, A_n, B и C . Один из них знает хотя бы двоих. Тогда в любом случае один из пары A_1, A_n должен знать одного из пары

B, C . Если A_n знает B или C , то можно добавить одного из них в конец ряда и условие не нарушится. Аналогично, если A_1 знает B или C , то можно добавить одного из них в начало ряда, и условие снова не нарушится. В любом случае мы смогли продлить ряд на одного человека с сохранением условия. Продолжая действовать таким образом, мы получим требуемый ряд из 29 человек.

Критерии. Полное решение — 7 баллов