



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
8 класс



Решения

1. Андрей выписал подряд все числа от 1 до n без пробелов: 123456789101112.... При каком наименьшем n полученное число делится на все числа от 1 до 5?

Ответ: 20.

Решение. Последняя цифра должна быть, очевидно, 0 (число должно делиться на 2 и на 5). Число 12345678910 не подойдёт (оно не делится ни на 4, ни на 3), а число 1234567891011121314151617181920 подходит.

Критерии.

Доказано, что на конце 0, — 2 балла

Показано, что числа меньше нашего не подходят — 3 балла.

Арифметическая ошибка — минус 2 балла.

Ответ — 1 балл.

2. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 2 очка, за победу — 3 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 4 очка. Четыре команды набрали 13, 9, 9 и 5 очков. Сколько очков набрала пятая команда?

Ответ: 0.

Решение. Если бы все победы были блестящими, то в каждой игре разыгрывалось бы по 4 очка, а тогда пять команд вместе бы набрали 40 очков. Но если бы все победы были блестящими, то каждая команда набрала бы чётное число очков, т. е. четыре команды с известным количеством очков набрали бы как минимум 14, 10, 10 и 6 очков — это уже 40 очков. Значит, пятая команда все матчи проиграла и набрала 0 очков.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если найдено максимальное количество очков — 1 балл.

(в) Приведён только пример — 1 балл.

3. Треугольник PQR таков, что $\angle Q = 2\angle R$. В нём проведены биссектрисы PV и QU , пересекающиеся в точке I . На продолжении PQ за точку Q отмечена точка X , такая что $QI = QX$. Докажите, что прямая VX параллельна IQ .

Решение. Треугольник PIQ подобен треугольнику PVR по двум углам, поэтому их соответствующие внешние углы равны: $\angle QIV = \angle QVI$. Следовательно, $QV = QI$. Так как $QI = QX$, то треугольник XQV равнобедренный. А значит, $\angle QXV = \frac{1}{2}\angle PQV = \angle PQI$, что и даёт нужную параллельность.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Некоторые натуральные числа от 1 до $10^{10000000}$ разбили на пары так, что большее число в каждой паре делится на меньшее. Докажите, что не менее 5% всех чисел остались без пары.

Решение. Пусть $2n = 10^{100000000}$.

Отметим среди указанных чисел все нечетные числа, большие n — их ровно $n/2$. На них не делятся никакие другие наши числа (кратные им числа превышают $2n$), значит, парное к любому отмеченному числу должно быть его делителем и отличаться от него минимум в три раза (в два не может в силу нечетности отмеченных). Значит, любое число, стоящее в паре с каким-то из отмеченных, не превосходит $2n/3$ и, очевидно, нечетно. Таких чисел не более $n/3 + 1$ (округлим в большую сторону), значит, как минимум $n/2 - n/3 - 1 = n/6 - 1$ отмеченных чисел остались без пары. Осталось заметить, что $n/6 - 1$ существенно больше, чем 5% от $2n$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если есть мысли про нечетные больше половины — 1 балл.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. В каждой клетке квадрата 8×8 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее двух лжецов!» Докажите, что рыцарей не более 42.

Решение. Пусть лжецов всего k . Тогда клеток, соседних с ними, не более $4k$, и на них необходимо расставить $64 - k$ рыцарей. Обозначим за x количество пар «рыцарь – лжец», стоящих в соседних по стороне клетках.

Каждый из $64 - k$ рыцарей является соседом не менее двух лжецов, поэтому $x \geq 128 - 2k$.

С другой стороны, у каждого лжеца не более четырёх соседей-рыцарей, поэтому $x \leq 4k$. Отсюда получаем неравенство $4k \geq 128 - 2k$, откуда $k \geq 128/6$, что с учётом целочисленности количества лжецов даёт $k \geq 22$, что нам и требовалось.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если допущена арифметическая ошибка — 5 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.