



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
8 класс



Решения

1. На доске написано 17 подряд идущих натуральных чисел. Андрей сосчитал сумму их попарных НОКов. (То есть нашёл наименьшее общее кратное первого и второго числа, потом первого и третьего, первого и четвёртого, ..., 16-го и 17-го и всё это сложил.) Могло ли у него получиться число 987654321?

Ответ: Не могло.

Решение. Среди 17 подряд идущих чисел окажется 8 или 9 нечётных чисел. Их попарных НОКов будет $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ или $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, и все они будут нечётными. Остальные НОКи окажутся чётными. В любом случае сумма всех НОКов будет чётной.

Критерии.

Полное решение — 7 баллов

Есть арифметическая ошибка — 5 баллов

2. Все клетки нечётных столбцов доски 9×9 покрашены в чёрный цвет, а все клетки чётных столбцов — в белый. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых больше белых клеток, или тех, в которых больше чёрных клеток?

Ответ: Тех, в которых больше чёрных клеток.

Решение. Обозначим за X любую клетку в восьмом столбце. Зафиксируем эту клетку.

Заметим, что путей до X с преимуществом белых клеток столько же, сколько и путей до X с преимуществом чёрных клеток. В самом деле, любой такой путь с преимуществом белых клеток мы можем «перевернуть» и получить путь с преимуществом чёрных клеток.

Заметим теперь, что любой путь хромой ладьи до верхнего левого угла устроен так: он доходит до какой-нибудь клетки X , затем ладья ходит вправо и продолжает свой движение по девятому столбцу (который чёрный). От этого все варианты с равенством белых и чёрных клеток (и некоторые варианты с преимуществом белых) превращаются в варианты с преимуществом чёрных клеток. Превращения в обратную сторону не происходит.

Критерии.

Полное решение — 7 баллов

Остальное — 0 баллов

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, такой что $AB = 4$, $AD = 8$, $CD = 6$. Точка P — пересечение биссектрис углов A и D . Оказалось, что $PD = 10$, $\angle PBA = \angle PAB$. Найдите PC .

Ответ: 8.

Решение. Пусть K — середина AB , L — такая точка на AD , что $AL = 2$. Так как $AP = BP$, PK является серединным перпендикуляром к AB . Треугольники APK и APL равны ($AK = AL = 2$, AP общая и является биссектрисой A). Следовательно, $PL \perp AD$. Аналогично треугольники PDL и PDC равны ($LD = DC = 6$), а значит, угол C прямой. Отсюда по теореме Пифагора $PC = 8$.

Критерии.

Полное решение — 7 баллов

Остальное — 0 баллов

4. На доске написано несколько пар положительных чисел. Если пары (a, b) и (c, d) (не обязательно различные) выписаны, то Андрей также пишет и пару $(2ac, ad + bc)$. Через некоторое время Андрей понял, что какую бы пару он ни выписал, отношение первого числа этой пары ко второму равно отношению первого числа пары ко второму в одной из уже выписанных пар. Докажите, что это отношение для всех изначально выписанных пар было одинаковым.

Решение. Допустим противное. Возьмём две такие пары (a, b) и (c, d) , для которых $a/b < c/d$, причём все остальные такие отношения или больше c/d , или меньше a/b . Выпишем пару $(2ac, ad + bc)$ и докажем, что $\frac{2a}{ad+bc} = \frac{2}{\frac{b}{a} + \frac{d}{c}}$ (т.е. отношение первого числа ко второму в новой паре — среднее гармоническое таких отношений в старых парах; из этого сразу будет следовать противоречие). Но это равенство немедленно доказывается приведением к общему знаменателю.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Также известно, что любые двое могут передать сообщение от одного к другому, передавая его только через знакомых. Докажите, что можно выстроить их всех в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Решение. Будем строить этот ряд по очереди, постепенно удлиняя его. В начале возьмём любых трёх человек, где один знает остальных двоих, — поставим его между ними. Теперь пусть мы уже построили ряд $A_1, A_2, \dots, A_n$, где A_i и A_{i+1} знают друг друга для любого $1 \leq i < n$. Если $n = 29$, то задача решена. Пусть $n < 29$, а оставшиеся люди — это B, C и, возможно, кто-то ещё. Рассмотрим четвёрку людей A_1, A_n, B и C . Один из них знает хотя бы двоих. Тогда в любом случае один из пары A_1, A_n должен знать одного из пары B, C . Если A_n знает B или C , то можно добавить одного из них в конец ряда и условие не нарушится. Аналогично, если A_1 знает B или C , то можно добавить одного из них в начало ряда, и условие снова не нарушится. В любом случае мы смогли продлить ряд на одного человека с сохранением условия. Продолжая действовать таким образом, мы получим ряд из 29 человек. Теперь будем добавлять последнего человека (назовем его X). Заметим, что если X знаком с A_1 или A_{29} , то у нас все уже получилось. Также заметим, что если люди A_1 и A_{29} знакомы, то мы можем начать обходить цикл $A_1 A_2 \dots A_{29}$ с какого-нибудь друга X , потом добавить самого X в начало, и получить нужный нам ряд. Пускай теперь A_1 и A_{29} не знакомы. Теперь посмотрим, знаком ли X с A_4 или A_5 . Если незнаком, то в четверке $X A_1 A_{29} A_{14}$ A_{14} знаком и с A_1 , и с A_{29} , а в четверке $X A_1 A_{29} A_{15}$ уже A_{15} знаком с A_1 и A_{29} . Тогда всех этих людей можно перестроить по кругу следующим образом: $A_1 A_2 \dots A_{14} A_{29} A_{28} \dots A_{15}$. Тогда развернув этот круг начиная с друга X получим требуемый путь. Пусть теперь X дружит с кем-то из A_{14}, A_{15} , скажем A_k (важно, что вершины A_{k-1} и A_{k+1} не совпадают с первой и последней в пути). Тогда вершиной галочки в четверке $A_1 A_k A_{29} X$ все равно является A_k , и значит он дружит еще с кем-то, кроме X , НУО, с A_1 . Тогда рассмотрим A_{k-1} . Если он дружит с X , то X может встать между A_{k-1} и A_k . Иначе рассмотрим четверку $A_1 A_{k-1} A_{29} X$. В ней условие задачи может выполняться

только если A_{k-1} дружит с A_1 и с A_{29} . Тогда переставим людей следующим образом:
 $XA_kA_1A_2 \dots A_{k-1}A_{29}A_{28} \dots A_{k+1}$. Такой порядок нам подходит.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.