



Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
9 класс



Решения

1. В каждой клетке квадрата 10×10 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее трёх рыцарей!» А сколько рыцарей могло быть в этом квадрате?

Ответ: 0.

Решение. Допустим, что рыцари на доске есть. Рассмотрим самого верхнего из них, а если таких несколько — самого левого из самых верхних. Для него высказывание «в клетках, соседних по стороне с моей, не менее трёх рыцарей» не может быть истинным. Противоречие.

2. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Через вершину A провели прямую, отсекающую треть площади восьмиугольника (вершина B попала в меньшую часть). Через какую сторону прошла прямая?

Ответ: DE .

Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна четверти площади $ABCDEFGH$. Пусть O — центр восьмиугольника. Заметим, что площадь $AOCB$ в точности равна четверти площади $ABCDEFGH$ по симметрии. Значит, достаточно доказать, что площадь AOC равна площади ADC , т.е. что $AC \parallel OD$. В самом деле: $\angle COD = 45^\circ$ (это восьмая часть от 360°), $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle OCA = 45^\circ$, т.к. треугольник AOC — равнобедренный прямоугольный. Отсюда $AC \parallel OD$, что и заканчивает доказательство утверждения.

Итак, площадь четырехугольника $ABCD$ равна четверти, а пятиугольника $ABCDE$ — половине площади правильного восьмиугольника (последнее следует из симметрии фигуры). Поэтому треть достигается для прямой, пересекающей сторону DE .

3. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни появятся. Докажите, что $p \geq 7$.

Решение. Поскольку исходный трёхчлен не имеет корней, то $p^2 - 4q < 0$. Но числа p, q целые, поэтому $p^2 - 4q \leq -1$. Но $(p + 0,1)^2 - 4(q + 0,1) \geq 0$, т.е. $(p^2 - 4q) + (0,2p - 0,39) \geq 0$, откуда $0,2p - 0,39 \geq 1$, т.е. $p \geq 6,95$. Так как p целое, получаем искомый результат.

4. Андрей написал в ряд несколько (не менее двух) подряд идущих трёхзначных чисел в порядке возрастания, получив одно большое число (например, 123124125). Оказалось, что полученное число делится на все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 398399400.

Решение. Если в ряд написано два подряд идущих числа (скажем, a и $a + 1$), то получившееся число имеет вид $1001a + 1$ и потому не делится на 7 (так как 1001 делится на 7).

Пусть теперь мы записываем подряд числа $a, a + 1$ и $a + 2$ и получаем число $1001001a + 1002$, которое подходит по условию. Во-первых, это означает, что $a + 2$ делится на 5 и на 8 (т.е. делится на 40). Кроме того, $a + 1$ должно делиться на 3 ($1001001a + 1002$ сравнимо с $3a + 3$ по модулю 9 и в то же время должно делиться на 9), а ещё $a + 1$ должно делиться

на 7 ($1001001a + 1002$ сравнимо с $a + 1$ по модулю 7), т.е. $a + 1$ должно делиться на 21. Итак, $a + 1$ как минимум делится на 21 и оканчивается на 9. Наименьшее такое число — это $21 \cdot 9 = 189$, оно не подходит, а следующее — $21 \cdot 19 = 399$ — подойдёт. Это и даёт ответ 398399400.

5. В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохлаждается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней?

Ответ: не могут.

Решение. Давайте выдавать карточку каждому человеку каждый раз, когда он был запасным.

Допустим, что какой-то игрок сидел на скамейке запасных не более трёх раз. За эти разы он мог познакомиться не более с 30 людьми, а должен был с 32. Значит, каждый был запасным не менее четырёх раз, а тогда выдано не менее $4 \cdot 33 = 132$ карточек.

Допустим теперь, что 11 дней хватит на то, чтобы клуб перезнакомился. За 11 дней будет выдана всего 121 карточка, что противоречит предыдущему абзацу.