



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
9 класс



Решения

1. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 12000 его наименьший натуральный делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 11999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось хотя бы 10000 различных чисел?

Ответ: Неверно.

Решение. Разобьём числа от 1 до 12000 на шестёрки подряд идущих чисел. Заметим, что числа $6n + 3$ и $6n + 4$ дадут нам одну и ту же сумму (к первому числу прибавится 3, ко второму 2). Таким образом у нас склеится значение у 2000 пар чисел, а значит, получится уже не более 10000 чисел. Также можно заметить, что 25, 27 и 28 дадут одну и ту же сумму, а значит, и 10000 различных сумм тоже недостижимо. Вообще-то последнее замечание избыточно, поскольку изначально чисел 11999, а не 12000.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Если есть идеи про то, что останутся только четные числа — 3 балла

2. Линейную функцию $g(x) = px + q$ с $p \neq 0$ назовём парадоксальной для квадратного трёхчлена f , если из двух трёхчленов $f(px + q)$ и $pf(x) + q$ один имеет хотя бы один вещественный корень, а другой не имеет. На доске написаны сто квадратных трёхчленов. Оказалось, что любые два квадратных трёхчлена имеют общую парадоксальную функцию. Докажите, что у всей сотни трёхчленов есть общая парадоксальная функция.

Решение. Пусть $g(x) = px + q$ — парадоксальная функция для трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(x)$ и $f(px + q)$ либо оба имеют корни, либо оба не имеют. Обозначим за D дискриминант f . Рассмотрим несколько случаев.

Если $a > 0$ и $D \geq 0$, то $f(px + q)$ имеет корни, а тогда $pf(x) + q$ их не имеет. Следовательно, p и q должны быть одного знака (если $p > 0$, то график трёхчлена $pf(x)$ необходимо поднять вверх, чтобы он перестал иметь корни, а если $p < 0$, то наоборот, опустить).

Если $a > 0$ и $D < 0$, то $f(px + q)$ не имеет корней, а тогда $pf(x) + q$ их имеет. Следовательно, p и q должны быть разных знаков (если $p > 0$, то график трёхчлена $pf(x)$ необходимо опустить вниз, чтобы он стал иметь корни, а если $p < 0$, то наоборот, поднять).

Если $a < 0$ и $D \geq 0$, то p и q разных знаков. Доказывается аналогично.

Наконец, если $a < 0$ и $D < 0$, то p и q одного знака.

В каждом из этих случаев мы можем заменить числа p и q на 1 и q/p (результат не изменится при делении функции на ненулевую константу p). Также мы можем увеличить q , если $q > 0$, и уменьшить его, если $q < 0$, и функция останется парадоксальной.

Поскольку любые два из написанных трёхчленов имеют общую парадоксальную функцию, то произведение старшего коэффициента на дискриминант либо неотрицательно у всех трёхчленов, либо неположительно у всех трёхчленов. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично). Возьмём $P = 1$, а в качестве Q — максимум из значений q/p для попарных парадоксальных функций. Функция $g(x) = Px + Q$ подойдёт.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.

- Если решение неверное — 0 баллов.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Оказалось, что $\angle BDC = 60^\circ$ и биссектриса угла ABC перпендикулярна прямой CD . Докажите, что $AD + BD = CD$.

Решение. Отложим на луче DC точку E такую, что $DE = BD$ тогда треугольник BDE — равнобедренный с углом 60° при вершине, а значит равносторонний, в частности D, E — симметричны относительно биссектрисы угла $\angle ABC$. Тогда из условия следует, что E лежит на отрезке DC и $\angle ABD = \angle EBC$. Но из теоремы синусов, равенства $BD = BE$ и вписанности имеем $\frac{EC}{\sin \angle EBC} = \frac{EB}{\sin \angle ECB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}$, поэтому из предыдущего равенства получаем $AD = EC = DC - DE = DC - DB$, что и требовалось.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. Яша, Юра и Эдик решили съездить на рыбалку на пруд, но оказалось, что их мотоцикл вмещает лишь двоих, включая водителя. Тогда Яша с Юрой поехали на мотоцикле, а Эдик пошёл пешком. Яша отвёз Юру до пруда, вернулся за Эдиком, и они поехали вместе. По пути Эдик заметил, что Яше не стоило довозить Юру до пруда, а надо было высадить Юру немного раньше. И если бы Яша высадил Юру так, что все трое друзей добрались бы до озера одновременно, то они сэкономили бы 12% времени. Скорости пешеходов постоянны и равны между собой, скорость мотоцикла постоянна и более чем в два раза больше скорости пешехода. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости пешехода?

Ответ: в 7 раз.

Решение. Пусть скорость мотоцикла больше скорости пешехода в x раз. Обозначим A — начало пути, B — конец пути, C — точка, в которой Яша забрал Эдика в первом заезде, M — точка, в которой Яша забрал Эдика во втором заезде, N — точка, в которой Яша высадил Юру во втором заезде. За единицу длины примем расстояние AC , которое Эдик прошёл пешком в первом заезде, а за единицу времени — время, за которое Эдик прошёл это расстояние.

Рассмотрим первый заезд. В нём Эдик прошёл пешком расстояние $AC = 1$, а Яша проехал за это время расстояние x , которое равно пути $AB + BC$. Вместе они преодолели расстояние $2AB = AC + AB + BC = 1 + x$.

Найдём время первого заезда. Эдик за время 1 преодолел расстояние AC . Яша за это время проедет путь $AC + CB + BC$. Далее Эдик и Яша на мотоцикле проедут расстояние CB . Так как расстояние $AC = 1$, то Яша проедет AC за время $1/x$. Поэтому путь $CB + BC$ он проедет за время $(1 - 1/x)$, а путь CB — за время $(1 - 1/x)/2$. Итого на весь путь рыбаки потратят $1 + (1 - 1/x)/2 = \frac{3x-1}{2x}$.

Рассмотрим второй заезд. Пусть в этом случае Эдик прошёл пешком расстояние $AM = a$, а Юра — $NB = b$. Тогда $a + xa = 2AN$, $b + xb = 2MB$, и можно составить два уравнения

$$a + xa + 2b = 2AB, \quad b + xb + 2a = 2AB.$$

Вычитая из первого второе, получаем $AM = a = b = NB$. Подставляя в первое $a = b$ и $2AB = 1 + x$, получаем $AM = a = \frac{x+1}{x+3}$.

Рассуждая аналогично первому заезду получаем, что общее время второго заезда составляет

$$a + \frac{a}{x} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{x} \right) = a \frac{3x+1}{2x} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{3x+1}{2x},$$

что составляет 88% от времени первого заезда. Поэтому

$$\frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{3x+1}{2x} = \frac{88}{100} \cdot \frac{3x-1}{2x},$$

откуда $x_1 = 7$ или $x_2 = \frac{13}{9}$. Второй корень — посторонний, так как по условию $x > 2$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. В квадрате 9×9 первый, четвёртый и седьмой столбцы покрашены в красный цвет, второй, пятый и восьмой столбцы — в синий, остальные в жёлтый цвет. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых красных клеток больше, чем синих, или тех, в которых синих клеток больше, чем жёлтых?

Ответ: Способов поровну.

Решение. Пусть A — множество путей хромой ладьи, в которых красных клеток больше, чем синих, а B — множество путей, в которых синих клеток больше, чем жёлтых. Приведём взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее каждому пути из A путь из B . Рассмотрим путь из A . Он состоит из некоторого подпути x , хода в девятый столбец и k ходов в 9 столбце (возможно, $k = 0$). Сопоставим ему следующий путь: сперва сделаем k ходов вверх, затем ход вправо, потом применим подпуть x . Ясно, что такое преобразование обратимо и ставит в соответствие пути из A и B .

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.