

11 класс.

Задача 1 (70 баллов)

В спортивном зале вертикально вверх бросают мяч. К потолку он подлетает со скоростью вдвое меньшей начальной, упруго отражается и через время τ после броска возвращается в точку старта. Найдите скорость, с которой мяч вернулся назад, если во время движения на него действовала сила сопротивления, пропорциональная скорости.

Решение.

Запишем второй закон Ньютона для первой части движения, когда мяч движется к потолку. Движение одномерно, поэтому выберем ось, направленную вертикально вверх, и спроецируем второй закон Ньютона на неё:

$$m\dot{v} = -mg - kv \implies \dot{v} = -g - \alpha v. \quad (23)$$

Здесь m — масса мяча, k — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью, $\dot{v} = dv/dt$ — ускорение мяча. Домножим на dt обе части уравнения, и просуммируем от начала движения до его конца:

$$\sum dv = -g \sum dt - \alpha \sum v dt. \quad (24)$$

В левой части стоит изменение скорости за время движения, т.е. конечная скорость $v_0/2$ минус начальная v_0 . Суммарное время полёта обозначим за T_1 . В последнем слагаемом написано суммарное перемещение мяча (т.к. $v dt = dx$), обозначим его за h (это высота потолка). Таким образом, получаем соотношение

$$v_0/2 - v_0 = -gT_1 - \alpha h \implies \frac{v_0}{2} = gT_1 + \alpha h. \quad (25)$$

Теперь перейдём ко второму закону Ньютона для движения мяча вниз. Будет всё то же самое, только у силы сопротивления изменится знак:

$$\dot{v} = -g + \alpha v \implies \sum dv = -g \sum dt + \alpha \sum v dt. \quad (26)$$

В конце движения мяч имеет неизвестную скорость v_f , а в начале движения скорость $-v_0/2$ (по условию удар упругий, следовательно, модуль скорости равен $v_0/2$, при этом ось направлена вверх). Получаем

$$-v_f + v_0/2 = -gT_2 + \alpha h. \quad (27)$$

Здесь мы обозначили за T_2 время движения мяча вниз. Заметим, что $T_1 + T_2 = \tau$, следовательно, решая совместно систему из двух уравнений, получим $v_f = g\tau$.

Ответ: $v_f = g\tau$.

Критерии оценивания.

Второй закон Ньютона для движения вверх	15 баллов
Второй закон Ньютона для движения вниз	15 баллов
Суммирование второго закона Ньютона по всему отрезку движения мяча	15 баллов за каждое уравнение
Ответ	10 баллов

Задача 2 (70 баллов)

На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки. Масса рамки m , величина индукции B . Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?

Решение.

Из-за того, что по рамке течёт ток, на неё будет действовать сила Ампера со стороны магнитного поля. Эта сила будет создавать некий момент относительно вершины квадрата. Если он окажется больше момента силы тяжести относительно той же вершины, рамка начнёт приподниматься. Таким образом, надо вычислить момент силы Ампера и сравнить его с моментом силы тяжести.

Сила Ампера, действующая на элемент длины $d\vec{l}$, по которому течёт ток I , равна

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (28)$$

Здесь $\vec{B}$ — вектор индукции магнитного поля. В нашем случае угол между стороной и полем равен $\pi/4$, поэтому по модулю сила, действующая на каждую из сторон, равна

$$F = IaB \sin \pi/4 = IaB \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (29)$$

Две силы направлены в одну сторону (перпендикулярно плоскости рамки), две — в противоположную.

Теперь запишем условие равенства нулю моментов этих сил относительно одной из сторон рамки. Будем учитывать, что моменты силы Ампера приложены к серединам сторон. Получим:

$$M_A = -Fa + F \frac{a}{2} - F \frac{a}{2} = -Fa. \quad (30)$$

Момент силы тяжести равен $mga/2$. Таким образом, чтобы рамка начала вращаться, нужно, чтобы

$$Fa - mga/2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F \geq mg/2, \quad (31)$$

откуда для минимального значения тока находим

$$I = \frac{mg}{aB\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Критерии оценивания.

Нахождение силы Ампера для каждой стороны	15 баллов
Нахождение моментов сил Ампера относительно одной из сторон	25 баллов
Условие начала вращения	20 баллов
Ответ	10 баллов

Задача 3 (60 баллов)

Два небольших проводящих шарика подвешены на двух шелковых нитях равной длины, которые закреплены в верхней общей точке. Шарикам сообщили равные по модулю и знаку электрические заряды, в результате чего нити разошлись на угол α_1 . Каким будет угол между нитями, если один из шариков полностью разрядить?

Решение.

Запишем условие равновесия шариков до разрядки. На шарик действует сила натяжения T , а также сила кулоновского взаимодействия F . Расстояние между шариками равно $2a$. Спроецируем на горизонтальную ось эти силы и для условия равновесия получим:

$$T \sin \frac{\alpha_1}{2} = k \frac{q^2}{(2a)^2} = k \frac{q^2}{4l^2 \sin^2(\alpha_1/2)}. \quad (33)$$

В проекции на вертикальную ось условие равновесия даёт

$$T \cos \frac{\alpha_1}{2} = mg, \quad (34)$$

откуда окончательно получаем связь

$$\frac{\sin^3(\alpha_1/2)}{\cos(\alpha_1/2)} = \frac{k}{mg} \frac{q^2}{4l^2}. \quad (35)$$

После разрядки одного из шариков сила электростатического отталкивания исчезнет, шарики коснутся друг друга и, так как они проводящие, заряд перераспределится между ними. На каждом из шариков он станет равен $q/2$. После этого шарики снова разойдутся на угол α_2 , который находится из условия, аналогичного написанному выше:

$$\frac{\sin^3(\alpha_2/2)}{\cos(\alpha_2/2)} = \frac{k}{mg} \frac{(q/2)^2}{4l^2} = \frac{1}{4} \frac{\sin^3(\alpha_1/2)}{\cos(\alpha_1/2)} \quad (36)$$

Это соотношение и даёт ответ задачи.

Критерии оценивания.

Условие равновесия по горизонтали	10 баллов
Условие равновесия по вертикали	10 баллов
Связь между углом отклонения и зарядом	10 баллов
После разрядки шарика заряды перераспределяются	20 баллов
Ответ	10 баллов