11 класс

11.1. **Ответ.** Не существуют.

См. решение задачи 10.1.

11.2. См. решение задачи 10.2.

11.3. Обозначим через A', B', C', D' середины боковых ребер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно (см. рис. 9). Пусть для определенности, ребра SB, SC и SD — хорошие, т. е. $AB' = CB'$, $BC' = DC'$, $CD' = AD'$. Геометрическое место точек, равноудаленных от A и C — плоскость, перпендикулярная отрезку AC (и проходящая через его середину). Точки B' и D' лежат в этой плоскости, поэтому $B'D' \perp AC$. Так как $B'D'$ — средняя линия треугольника SBD, то $BD \parallel B'D'$, откуда $BD \perp AC$.

Так как $A'C'$ — средняя линия треугольника SAC, то $AC \parallel A'C'$, откуда $BD \perp \perp A'C'$, значит A' лежит в плоскости, перпендикулярной BD и проходящей через C'. Так как $BC' = DC'$, то эта плоскость является геометрическим местом точек, равноудаленных от B и D. Отсюда $BA' = DA'$, т. е. SA — хорошее ребро.

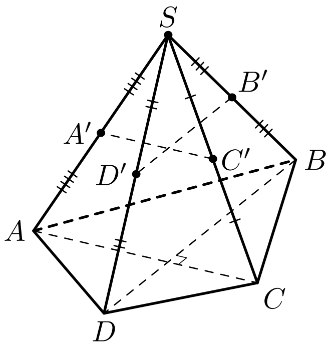

Рис. 9

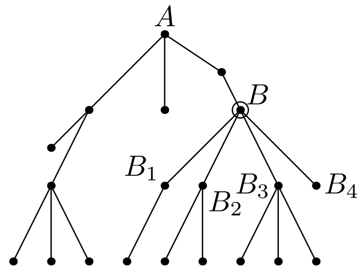

Рис. 10

11.4. Применим индукцию по n. При $n \leqslant 50$ утверждение верно. Докажем утверждение для некоторого $n \geqslant 51$, предполагая, что оно верно для $1, 2, \ldots, n-1$.

Для каждой пары городов X, Y обозначим через $p(X, Y)$ единственный путь от X до Y, в котором ни одна дорога не пройдена дважды. Зафиксируем город A (столицу) (см. рис. 10). Для каждого города C путь $p(A, C)$ содержит A, C и некоторое количество промежуточных городов (в частности, $p(A, A)$ содержит только A). Если город C входит в путь $p(A, D)$, то будем говорить, что D *подчинен* C (в частности, C подчинен самому себе, а все города подчинены A). Если D подчинен C и, кроме этого, имеется дорога из D в C, то скажем, что D — *пригород* города C.

Среди всех городов, у которых не меньше 51 подчиненных (таков, например, город A), рассмотрим город B с наименьшим количеством l подчиненных. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_l$ — все пригороды города B; у каждого B_i подчиненных меньше, чем у B, поэтому их не больше 50 (иначе получилось бы противоречие с выбором B).

Сделаем город B закрытым. После этого из города X, подчиненного B_i, нельзя добраться до города Y, не подчиненного B_i, так как иначе путь $p(X, Y)$ проходил бы через B. Если же города X и Y подчинены B_i, то путь $p(X, Y)$ содержит только города, подчиненные B_i, и в нем не более 49 дорог. Далее, к множеству городов, не подчиненных B (таких городов не более $n - 51$, и любые два из них по-прежнему соединены путем), можно применить предположение индукции и закрыть не более $\frac{n-51}{51}$ городов, чтобы выполнялось условие задачи. Итого закрыто не более $\frac{n-51}{51} + 1 = \frac{n}{51}$ городов, и все условия выполнены.

11.5. Пусть $a \in (0, \frac{\pi}{4}]$, $b \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ и $a + b = \frac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x = a$, то оно выполняется и для $x = b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

Если $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$, то $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$, $\cos x \geqslant \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но $A + \frac{1}{A} = (\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}})^2 + 2 \geqslant 2$.

11.6. См. решение задачи 10.6.

11.7. **Ответ.** При n, делящихся на 3, выигрывает первый; при всех остальных n — второй.

Заметим, что после ходов первого и второго игроков количество закрашенных клеток увеличивается на 3. Поэтому после хода второго оно всегда кратно трем.

Пусть n не кратно трем. Тогда второй может ходить, как ему заблагорассудится. Предположим, что после очередного хода второго первый не может сделать хода. Тогда все клетки закрашены. Это противоречит тому, что количество закрашенных клеток кратно трем. Поэтому первый всегда сможет сделать ход, и выиграет второй.

Пусть n кратно трем. Приведем выигрышную стратегию для первого. Первым ходом он закрасит клетку, отстоящую на 3 от края; тогда полоска разбилась на не более, чем два куска, один из которых имеет длину 2 (назовем такой кусок *домино*). Покажем, что первый сможет добиться выполнения следующего условия:

• *После хода первого, если полоска разбита на k кусков, то не менее $k/2$ из них — домино. После хода второго, если полоска разбита на k кусков, то не менее $(k-1)/2$ из них — домино.*

В таком случае, после любого хода первого останется хотя бы один кусок (так как до его хода количество клеток было кратно трем), а значит, останется хотя бы одно домино; поэтому второй всегда сможет сделать ход и проиграет.

Итак, пусть после очередного хода первого условие выполняется. Второй своим ходом либо закрашивает домино (тогда число кусков k уменьшается на 1), либо закрашивает 2 клетки в большем куске (тогда k увеличивается не более, чем на 1). В любом случае, условие выполнено.

Если еще остался кусок длины 3 или больше, то первый закрашивает в нем третью клетку от края; тогда количество домино увеличивается хотя бы на 1, а k — не больше, чем на 1. Если остался кусок длины 1, то, закрасив его, первый просто уменьшает количество кусков. Наконец, если все куски — домино, то их хотя бы три, т. к. их суммарная длина делится на 3. Тогда после закрашивания первым произвольной клетки остается хотя бы три куска, из которых только один — не домино. Таким образом, после хода первого условие опять же выполнено.

11.8. **Ответ.** $x = y = z = t = 0$.

Первое решение. Возведем в квадрат обе части равенства $x + y = -(z + t)$, получим $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2zt + t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 2(zt - xy) \Rightarrow (x^2 + y^2 - z^2 - t^2)^2 = 4(zt - xy)^2$.

Раскрыв скобки, получим из этого равенства $4xyzt = A - \frac{B}{2}$, где $A = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2$, $B = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$.

Отсюда $2N = 2(x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt) = 2(B + (A - \frac{B}{2})) = B + 2A = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$. Если $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \neq 0$, то в разложение числа N на простые сомножители двойка входит в нечетной степени, значит, N не является квадратом. Итак, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, что приводит к решению $x = y = z = t = 0$.

Второе решение. Пусть четверка чисел, не все из которых равны нулю, удовлетворяет условию задачи. Если каждое из них четно, разделим все числа на 2, получим четверку чисел, удовлетворяющих условию. Продолжим деление на 2 до тех пор, пока одно из чисел не станет нечетным. Так как сумма чисел нечетна, то среди них либо два нечетных, либо все они нечетные.

Если среди чисел два нечетных, то $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ имеет остаток 2 при делении на 4, и поэтому не является точным квадратом.

Пусть все числа нечетны: $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$, $z = 2c + 1$, $t = 2d + 1$, где $a + b + c + d = -2$. Покажем, что $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ делится на 8, но не делится на 16. Отсюда будет следовать, что N не является точным квадратом. Запишем $N = 16(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 32(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 24(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8(a + b + c + d) + 4 + 4(4K + 2a + 2b + 2c + 2d + 1)$, где K — целое. Далее, так как $a + b + c + d = -2$, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ четно, откуда $N = 16M + 8$, где M — целое.