9 класс

9.1. **Ответ.** 3 хода.

Очевидно, что одного хода не хватит. После двух ходов найдутся по крайней мере три карточки, перевернутые по два раза, а значит, эти карточки будут в исходном положении.

Приведем пример переворачивания всех карточек за три хода. Пронумеруем карточки цифрами от 1 до 7 и перевернем за первый ход карточки с номерами 1,2,3,4,5, за второй ход — 1,3,4,5,6, а за третий ход — 1,3,4,5,7.

9.2. Пусть x_1, x_2 - корни второго уравнения, $n = 2007$, тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c}$, $x_1x_2 = \frac{a}{c}$, $nx_1 + nx_2 = -\frac{b}{a}$, $nx_1nx_2 = \frac{c}{a}$, т. е. $\frac{dn}{c} = -n(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}$, $\frac{n^2a}{c} = n^2x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Из второго равенства получаем $n^2 = \frac{c^2}{a^2}$, а из первого $\frac{d^2n^2}{c^2} = \frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$, значит, $b^2 = d^2$.

З а м е ч а н и е. Ясно, что числа $\frac{d}{c}$ и $\frac{b}{a}$ имеют одинаковые знаки — они различаются в 2007 раз. Поэтому, если знаки a и c совпадают, то $b = d$, иначе $b = -d$; оба случая возможны.

9.3. Заметим, что AI — биссектриса угла BAC. Из равенства углов C_1AI и B_1AI следует равенство хорд C_1I и B_1I. Аналогично, $B_1I = A_1I$ (см. рис. 4). Значит, точка I является центром описанной окружности для всех треугольников $A_1B_1C_1$.

9.4. **Ответ.** $k = 2$.

Заметим, что потребуется сделать не менее двух пересадок. Действительно, из произвольного города A без пересадок можно добраться не более чем в 4 города, а ровно с одной пересадкой — не более, чем в $4 \cdot 3 = 12$ городов (так как один из рейсов ведет из каждого из этих городов в A). Итак, если использовать не более одной пересадки, то из любого города можно долететь не более чем в 16 других городов, а требуется

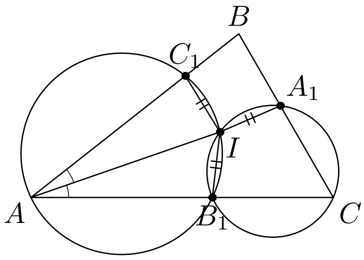

Рис. 4

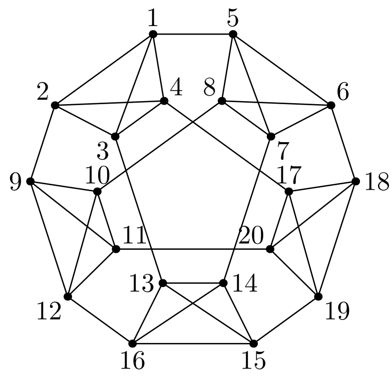

Рис. 5

— в 19. На рис. 5 показано, как можно организовать рейсы, чтобы было не более двух пересадок. Картинка симметрична, поэтому достаточно показать, как можно добраться из первого города в любой другой. Из него без пересадок можно добраться до городов 2, 3, 4, 5. Затем с одной пересадкой в города 6, 7, 8 (из 5), 9(из 2), 13 (из 3) и 17 (из 4). И с двумя пересадками — в города 10, 11, 12 (из 9), в 14, 15, 16 (из 13), в 18, 19, 20 (из 17).

9.5. **Ответ.** Могло.

Например, подойдет набор палочек с длинами 1, 1, 2, 3, 5. Разломив палочку длины 5 на две палочки длиной 2 и 3, мы сможем составить два равнобедренных треугольника со сторонами 1, 2, 2 и 1, 3, 3.

9.6. См. решение задачи 8.6.

9.7. Предположим противное: n делится ровно на вторую степень каждого своего простого делителя. Тогда $n = k^2$, где k — произведение всех простых делителей p. Следовательно, достаточно доказать, что n не может являться точным квадратом.

Предположим противное: $n = m^2$, где m — натуральное. Если n четно, то $n+2$ также четно, и одно из них не делится на 4, что противоречит условию.

Если n нечетно, то и m нечетно, $m = 2k-1$. Тогда $n+1 = (2k-1)^2+1 = 4(k^2-k)+2$ — делится на 2, но не делится на 4, что опять противоречит условию.

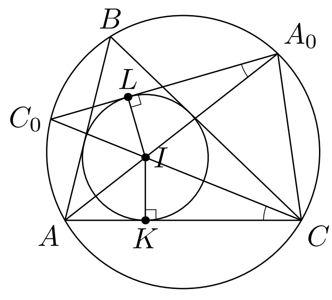

Рис. 6

9.8. Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через ω, её центр — через I, точки касания ω с AC и A_0C_0 — через K и L соответственно. Тогда в треугольниках IKC и ILA_0 углы IKC и ILA_0 — прямые (как углы между радиусом и касательной), и $IK = IL$, так как оба этих отрезка — радиусы ω (см. рис. 6). Также, поскольку точки A, I, A_0 лежат на биссектрисе угла A, а точки C, I, C_0 — на биссектрисе угла C, то $\angle ICK = \angle C_0CA = \angle C_0A_0A = \angle LA_0I$ (т.к. углы $\angle C_0A_0A$ и $\angle C_0CA$ опираются на одну дугу описанной окружности C_0A). Поэтому прямоугольные треугольники IKC и ILA_0 равны по катету и острому углу, следовательно, $IA_0 = IC$, то есть треугольник IA_0C — равнобедренный. Далее $\angle A_0IC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC_0} + \overset{\smile}{A_0C}) = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{A_0B}) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_0BC_0} = \angle A_0CC_0 \Rightarrow \angle A_0IC = \angle A_0CI \Rightarrow A_0I = A_0C$. Значит, $\triangle A_0IC$ — равносторонний. Отсюда $\angle ABC = \angle AA_0C = 60^\circ$.

З а м е ч а н и е. Если рассмотреть произвольный треугольник ABC, в котором $\angle B = 60^\circ$, то для него отрезок A_0C_0 касается ω. Действительно, проведя все рассуждения в обратном порядке (приняв за L проекцию I на A_0C_0), получаем равенство треугольников IKC и ILA_0 по гипотенузе и острому углу, из которого следует, что $IK = IL$, поэтому L лежит на ω, и, следовательно, A_0C_0 касается ω.