2011

Всероссийская олимпиада школьников по математике
II (муниципальный этап)

Решения
10 класс

1. **Ответ:** 3 км/ч.

Решение. Будем рассматривать движение катера относительно течения реки. При таком рассмотрении круг, плывущий по течению, неподвижен. Поскольку при возвращении назад скорость катера относительно течения возросла в 1,5 раза, то время, затраченное на возвращение к кругу, уменьшилось в 1,5 раза и составило 20 минут. Общее время свободного движения круга составило 50 минут, то есть 5/6 часа, и за это время круг проплыл относительно берега 2,5 км.

2 1 способ.

Справедливо равенство $4^{n+3} - 4^n = 4^n (4^3 - 1) = 63 \vdots 4^n$. Следовательно, разность $4^{n+3} - 4^n$ делится на 9 при любом целом $n > 0$. Иначе говоря, числа 4^{n+3} и 4^n имеют один и тот же остаток при делении на 9. При $n < 3$ имеем равенства: $4^0 = 1 = 9 \cdot 0 + 1$; $4^1 = 4 = 9 \cdot 0 + 4$ и $4^2 = 16 = 9 \cdot 1 + 7$. Остатки 1, 4 и 7 повторяются с периодом 3. Аналогично, число $15n$ имеет при делении на 9 остатки 0, 6 и 3, повторяющиеся с периодом 3. В итоге сумма $4^n + 15n$ имеет при делении на 9 остаток 1 при всех целых неотрицательных n, а число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

2 способ – по индукции.

При $n = 0$ имеем $4^n + 15n - 1 = 0$, то есть, делится на 9. Пусть выполнено предположение индукции при некотором целом $k \geq 0$, то есть, $4^k + 15k - 1$ делится на 9. Пусть

$4^k + 15k - 1 = 9m$.

Тогда

$4^k = 9m. - 15k + 1$.

$4^{k+1} = 4 \cdot (9m. - 15k + 1) = 36m - 60k + 4 = 36m - 15k - 15 + 18 + 1$

и

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 36m + 18$ делится на 9.

По принципу математической индукции утверждение доказано.

3. $m = 3$.

Заметим, что дискриминант D уравнения равен

$D = (m + 1)^2 - 4(m - 1) = (m - 1)^2 + 4 > 0$,

поэтому уравнение при любом m имеет два корня. Представим сумму квадратов корней x_1 и x_2 в виде

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Из теоремы Виета получаем

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(m+1)^2}{4} - 2(m-1)$$

Минимум величины $x_1^2 + x_2^2$ достигается в точке минимума функции
$f(m) = (m + 1)^2 – 8(m – 1)$,
равной $m_{min} = 3$.

4. Достаточно доказать равенство углов $\angle AMD = \angle AKD$. Выполним вычисления.

$\angle AKD = 180° – ½(\angle A + \angle D) = ½(\angle B + \angle C)$.

С другой стороны, треугольники ABC и BCD по условию являются равнобедренными, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA = 90° – ½ \angle B$ и $\angle BDC = \angle CBD = 90° – ½ \angle C$. Поэтому

$\angle AMD = \angle CMB = 180° – (\angle MCB + \angle MBC) = 180° – (90° – ½\angle B) – (90° – ½\angle C) =$

$= ½(\angle B + \angle C)$.

5. Для цепочки друзей $A – C_1 – C_2 – … – C_k – B$ её длиной считаем число $k + 1$. Будем называть цепочку друзей $A – C_1 – C_2 – … – C_k – B$, длина которой больше 1, замкнутой, если A дружит с B. Мы можем считать, что в сообществе нет замкнутых цепочек, так как, если разорвать любую из них, возникнет сообщество со строго меньшим числом дружеских связей, для которого условие задачи останется в силе. Если для такого сообщества утверждение задачи будет доказано, то оно автоматически будет доказано и для исходного сообщества.

Выделим самую длинную цепочку друзей $A – C_1 – C_2 – … – C_k – B$. Таких цепочек может быть несколько, в этом случае выберем любую из них.

Если длина самой длинной цепочки меньше или равна 4, то все члены сообщества оказываются друзьями или друзьями друзей участника C_2.

Пусть длина самой длинной цепочки больше или равна 5. Тогда сформируем группу, состоящую из C_2 и тех его друзей и друзей друзей, которые не связаны с C_2 через C_3. Сам C_3 тоже не попадает в эту группу. Количество членов в сформированной группе не меньше 3. Для оставшихся участников условие задачи по-прежнему выполнено, то есть любые два участника, не вошедшие в выделенную группу, могут быть соединены цепочкой друзей.

Будем проделывать указанную процедуру до тех пор, пока не встретится максимальная цепочка, длина которой меньше 5. Если такая цепочка не встретится, то мы проделаем эту процедуру 5 раз. В итоге число участников, оставшихся не включёнными в какую-либо группу, останется не больше, чем $20 – 3 \cdot 5 = 5$ человек. Максимальная цепочка, составленная из них, уже имеет длину меньше 5.

Решение методом графов (это решение не отличается от предыдущего, но использует терминологию теории графов).

Рассмотрим граф Г, вершины которого соответствуют участникам сообщества, а рёбра – дружеским связям между ними. По условию задачи граф является связным, то есть из любой его вершины в любую другую можно пройти по рёбрам.

Мы можем считать, что граф Г не содержит циклов, то есть является деревом. В случае, когда граф Г содержит циклы, их можно разорвать, по очереди удаляя в ещё не разорванных циклах по одному ребру.

Расстоянием между вершинами в графе называется длина самого короткого маршрута, ведущего из первой вершины во вторую. При этом считается, что длина каждого ребра равна 1. Диаметром графа называется максимальное расстояние между его вершинами.

Если диаметр дерева меньше или равен 4, то найдётся вершина, расстояния от которой до остальных вершин не превосходят 2. Она находится в середине маршрута, соединяющего две наиболее удалённые вершины.

Предположим, что диаметр нашего дерева больше или равен 5. Выберем две вершины A и B на максимальном расстоянии друг от друга. Пусть

$A – C_1 – C_2 – … – C_k – B$

– маршрут из A в B. Удалим ребро $C_2 – C_3$. Если из дерева удалить любое ребро, оно распадётся на два дерева (две компоненты). Одна компонента будет содержать вершину C_2. Диаметр этой компоненты меньше или равен 4, и она содержит не менее трёх вершин. Вторая компонента содержит вершину C_3.

Применим описанную процедуру ко второй компоненте, и будем выполнять её далее до тех пор, пока не останутся только компоненты, диаметры которых не превосходят 4. Максимальное число разбиений, которое можно сделать при выполнении этих условий – 5. В этом случае число компонент равно 6.