РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАСС

Общие замечания по проверке:

Почти у всех задач критерии написаны на основании «приведенного» к задаче решения. В случае «другого» решения нужно выработать другие критерии в соответствии с общими требованиями к критериям.

1. *Доказать, что если уравнения*

$$x^2 + px + q = 0 \text{ и } x^2 + bx + c = 0$$

не имеют корней, то уравнение

$$7x^2 + (2p + 3b + 4)x + 2q + 3c + 2 = 0$$

тоже не имеет корней.

Решение. Так как уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ не имеют корней, то $x^2 + px + q > 0$ и $x^2 + bx + c > 0$ для любых x.

Заметим, что $(x^2 + 2x + 1) \geq 0$ для всех x. Тогда

$$7x^2 + (2p + 3b + 4)x + 2q + 3c + 2 = 2(x^2 + px + q) + 3(x^2 + bx + c) +$$
$$+ 2(x^2 + 2x + 1) > 0$$ для любых x.

2. *Наименьшее общее кратное семи натуральных чисел равно* 2012. *Найдите наименьшую возможную сумму этих чисел.*

Решение. Разложим число 2012 на простые множители $2012 = 2^2 \cdot 503$.

Одно из чисел, НОК которых равен 2012, должно делиться на $2^2 = 4$, и одно (возможно то же самое) – на 503. Если одно и то же число кратно и 4, и 503, то оно кратно 2012, а сумма семи чисел не меньше 2018. Если 4 и 503 кратны разные числа, то сумма всех семи чисел не меньше 4+503+1+1+1+1+1=512. Поскольку НОК(4,503,1,1,1,1,1)=2012, то 512 и есть наименьшее возможное значение суммы.

Комментарии по проверке:

При доказательстве минимальности рассмотрен только случай, когда 4 и 503 кратны разные числа – 2 балла.

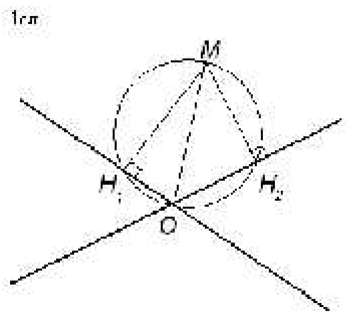
Приведен пример чисел, с суммой 512, но нет доказательства минимальности – 3 балла.

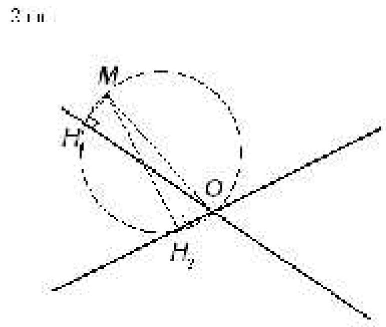
Доказано, что сумма ≥ 512, но не указан пример таких чисел – 4 балла.

3. *Три прямые пересекаются в одной точке O. Вне этих прямых взяли точку M и опустили из нее перпендикуляры на них. Точки H_1, H_2 и H_3 – основания этих перпендикуляров. Найдите отношение длины отрезка OM к радиусу окружности, описанной около треугольника $H_1H_2H_3$.*

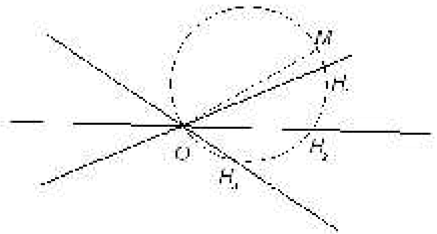
Ответ: 2.

Решение.





Рассмотрим сначала две пересекающиеся прямые и точку M, лежащую вне этих прямых. H_1 и H_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на эти прямые. Возможны случаи:



1) H_1 и H_2 лежат по разные стороны от прямой OM;
2) H_1 и H_2 лежат по одну сторону от прямой OM;
3) H_1 или H_2 совпадает с точкой O.

В первом случае $\angle MH_1O + \angle MH_2O = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Четырехугольник MH_1OH_2 является вписанным, т.е. точки M, H_1, O и H_2 лежат на одной окружности, причем диаметр этой окружности – отрезок OM. Во втором случае четырехугольник MH_1H_2O является вписанным. Точки M, H_1, O и H_2 снова лежат на одной окружности с диаметром OM. В третьем случае, очевидно, для точек M, H_1, O и H_2 получаем то же самое.

Проведем третью прямую и отметим точку H_3. Тогда, очевидно, точки H_1, H_2 и H_3 лежат на окружности с диаметром OM и искомое отношение равно 2.

Комментарии по проверке:

Задача решена, но при доказательстве того, что M, H_1, O и H_2 лежат на одной окружности рассмотрен только случай 1) или случай 2) – 5 баллов.

4. *Пять корней многочлена* $f(x) = x^5 - \frac{19}{4}x^4 + \frac{19}{4}x^3 + ax^2 + bx + c$ *образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.*

Ответ: $2 + \sqrt{3}$.

Решение. Обозначим знаменатель прогрессии q, q>1. Пусть корни многочлена x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 равны соответственно $\frac{b}{q^2}, \frac{b}{q}, b, bq$ и bq^2.

Воспользуемся теоремой Виета для многочлена пятой степени.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{19}{4};$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5=\frac{19}{4};$$

Обозначим $\frac{1}{q}+q=u>2.$. Тогда $\frac{1}{q^2}+q^2=\left(\frac{1}{q}+q\right)^2-2=u^2-2$.

$$\frac{1}{q^3}+q^3=\left(\frac{1}{q}+q\right)^3-3\left(\frac{1}{q}+q\right)=u^3-3u.$$

Получим: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=$

$$=\frac{b}{q^2}+\frac{b}{q}+b+bq+bq^2=b\left(\frac{1}{q^2}+q^2+\frac{1}{q}+q+1\right)=b\left(u^2+u-1\right).$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5=$$

$$=\frac{b}{q^2}\left(\frac{b}{q}+b+bq+bq^2\right)+\frac{b}{q}\left(b+bq+bq^2\right)+b\left(bq+bq^2\right)+bq\cdot bq^2=$$

$$=b^2\left(\frac{1}{q^3}+q^3+\frac{1}{q^2}+q^2+2\left(\frac{1}{q}+q\right)+2\right)=b^2\left(u^3-3u+u^2-2+2u+2\right)=$$

$$=b^2\left(u^3+u^2-u\right)=b^2u\left(u^2+u-1\right).$$

Получим систему:

$$\begin{cases} b\left(u^2+u-1\right)=\frac{19}{4}; \\ b^2u\left(u^2+u-1\right)=\frac{19}{4}. \end{cases}$$

Значит, $bu=1\Rightarrow b=\frac{1}{u}.$ $\frac{1}{u}\left(u^2+u-1\right)=\frac{19}{4}.$ $4u^2-15u-4=0.$

$u=-1/4$ или $u=4$.

Для $u=4$ получаем $q=2+\sqrt{3}$ или $q=2-\sqrt{3}$. Так как прогрессия возрастающая, то $q=2+\sqrt{3}$.

Комментарии по проверке:

Правильно составлена система двух уравнений, неизвестными в которой являются знаменатель прогрессии и какой-то из ее членов, но при этом она не решена или решена неверно – 2 балла.

5. *В анкете* 2012 *вопросов, на каждый из которых - два варианта ответа: «да» или «нет». Назовем двух людей “похожими”, если они ответили одинаково не менее чем на половину вопросов. Докажите, что среди любых* 1007 *человек найдутся “похожие” люди.*

Решение. Докажем методом от противного. Предположим, что найдутся 1007 попарно непохожих людей. Для пары анкет различие в ответе на один вопрос назовем «нюансом». Оценим общее количество «нюансов» для всех пар людей, которые можно составить из наших 1007 непохожих. Всего пар $\frac{1007\cdot 1006}{2}$. Для каждой пары не менее 1007 «нюансов». Всего получаем не менее $\frac{1007^2\cdot 1006}{2}$ «нюансов».

Теперь рассмотрим один конкретный вопрос. Пусть на него k человек ответили «да». Тогда 1007- k ответили «нет». Тогда из-за этого вопроса образуется k(1007- k) «нюансов». $k\left(1007-k\right)\le 503\cdot 504$. Всего вопросов 2012, поэтому общее число «нюансов» $\le 503\cdot 504\cdot 2012$.

Но $\frac{1007^2\cdot 1006}{2}>503\cdot 504\cdot 2012.$ Противоречие!

Комментарии по проверке: Правильно получена только одна из оценок на общее количество «нюансов» для 1007 непохожих людей: верхняя или нижняя – 2 балла.

Составитель всех задач 10 класса К.П. Исаев