РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II этап, 2013 год

10 класс

10.1. В магазине Саша купил две ручки, три тетради и один карандаш и заплатил 33 рубля, Дима купил одну ручку, одну тетрадь и два карандаша и заплатил 20 рублей. Сколько заплатила Таня за четыре ручки, пять тетрадей и пять карандашей?

Ответ. 73 рубля.

Обозначим a, b, c цену ручки, тетради, карандаша. Тогда по условию имеем $2a+3b+c=33$ и $a+b+2c=20$. Умножив второе соотношение на 2 и, сложив с первым равенством, получим ответ.

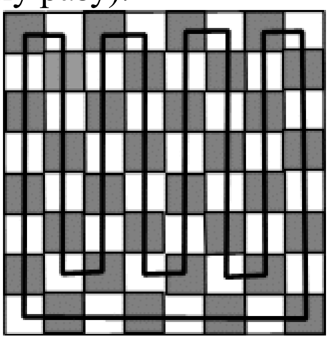
10.2. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов – целые числа, а все остальные члены не являются целыми?

Ответ. Да.

Пусть $a_1=2^{99}$ – первый член геометрической прогрессии, $q=\frac{3}{2}$ – знаменатель прогрессии. Рассмотрим общий член прогрессии $a_n=a_1q^{n-1}$. Дробь $\frac{3^{n-1}}{2^{n-100}}$ несократима, если $n>100$, так как 2 и 3 простые числа, и является целым числом, если $n\le 100$.

Комментарий. Правильный пример без достаточных обоснований 5 баллов.

10.3. Из шахматной доски вырезали две клетки – черную и белую. Докажите, что независимо от положения вырезанных клеток оставшуюся часть можно полностью покрыть костяшками домино (каждая из костяшек покрывает две соседние клетки доски, причем по одному разу).



Построим на шахматной доске замкнутый путь, проходящий по каждой клетке по одному разу. Отметим, что при движении по пути черные и белые клетки чередуются. Вырезанные клетки разобьют этот путь на две части. Каждая часть имеет четное количество клеток (она начинается и заканчивается клетками разного цвета) Значит, каждую часть можно заложить костяшками домино.

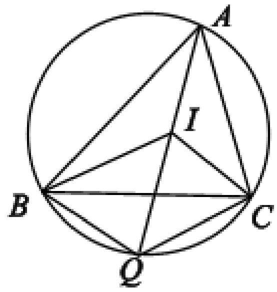
Комментарий. Если решение основано на переборе вариантов и пропущен какой-либо случай, то не более 2 баллов

10.4. Даны три ненулевых числа. Если поставить их в любом порядке в качестве коэффициентов квадратного трехчлена, то трехчлен будет иметь корни. Докажите, что у каждого из этих трехчленов есть положительный корень.

Во-первых, отметим, что если некоторый квадратный трёхчлен Ax^2+Bx+C имеет отрицательные корни (в том числе отрицательный корень кратности 2), то коэффициенты A, B и C одного знака. Действительно, по теореме Виета имеем $Ax_1x_2=C$, а поскольку произведение корней x_1 и x_2 положительное, коэффициенты A и C одного знака. Из $A(x_1+x_2)=-B$ и отрицательности корней следует, что коэффициенты A и B одного знака.

Пусть числа a, b, c из условия, причем c – наименьшее из них по модулю. Допустим, что у одного из трехчленов нет положительных корней. Нулевых корней нет, так как все свободные члены ненулевые, поэтому оба корня отрицательные. Значит, a, b, c числа одного знака. Но тогда $c^2=|c||c|\le|a||b|=ab<4ab$, и уравнение $ax^2+cx+b=0$ не имеет корней.

10.5. Через вершины B и C треугольника ABC и точку I – центр вписанной окружности провели окружность с центром в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.



Продолжим биссектрису угла A до пересечения с описанной окружностью в некоторой точке Q. Поскольку равные вписанные углы опираются на равные дуги, а равные дуги стягиваются равными хордами, получаем $QB=CQ$. Угол CIQ как внешний угол треугольника AIC равен полусумме углов A и C треугольника ABC. Тому же самому равен угол ICQ. Значит, треугольник IQC равнобедренный, стороны QI и QC равны. Таким образом Q центр окружности, описанной около треугольника BIC.