10 класс

1. Доказать, что в последовательности 2014, 20142014, 201420142014, ... нет такого числа, которое является квадратом целого числа.

Решение.

Число, оканчивающее на 14 при делении на 4 дает в остатке 2, но квадрат целого числа, при деление на четыре, может давать только остатки 0 или 1.

2. Сравните числа $\sqrt[2013]{2013!}$ и $\sqrt[2014]{2014!}$.

Решение.

Возведем оба числа в степень 2013×2014. Получаем, что надо сравнить числа $(2013!)^{2014} \vee (2014!)^{2013}$. Теперь разделим оба числа на $(2013!)^{2013}$. Таким образом надо сравнить $2013! \vee 2014^{2013}$, то есть $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2012\cdot 2013 \vee \underbrace{2014\cdot 2014\cdot \ldots \cdot 2014}_{2013}$ Отсюда следует, что

$\sqrt[2013]{2013!} < \sqrt[2014]{2014!}$.

3. На рисунке изображены графики квадратных трёхчленов

$$y = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad y = x^2 + cx + d.$$

Докажите, что $a^2 - c^2 > b - d$.

Решение:

Пусть x_1 и x_2 нули функции $f(x)=x^2+ax+b$, а x_3 и x_4 нули функции и $g(x)=x^2+cx+d$. Заметим, что $f(0)=b>d=g(0)>0$, а также $|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|$. Так как $|x_1 - x_2| = \sqrt{D_1} = \sqrt{a^2 - 4b}$ и $|x_3 - x_4| = \sqrt{D_2} = \sqrt{c^2 - 4d}$, то $\sqrt{a^2-4b} > \sqrt{c^2-4d} \Rightarrow a^2 - 4b > c^2 - 4d \Rightarrow a^2 - c^2 > 4b - 4d$, а так как b>d>0, то $4b - 4d > b - d$.

Рекомендации по проверке.

При правильном в целом решении отсутствует обоснование, что $4b - 4d > b - d$ (т.е b>d) – 5 баллов.

4. Решите неравенство в целых числах

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-3y+2}} + \frac{y^2}{\sqrt{-x+2y+1}} \ge y^2 + 2x^2 - 2x - 1\cdot$$

Ответ: (0;0), (2;1).

Решение.

Так как x,y целые, то $x-3y+2\geq 1$ и $-x+2y+1\geq 1$, тогда $\frac{x^2}{\sqrt{x-3y+2}}+\frac{y^2}{\sqrt{-x+2y+1}}\leq y^2+x^2 \Rightarrow y^2+2x^2-2x-1\leq y^2+x^2\Leftrightarrow$ $x^2-2x-1\leq 0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$. Таким образом x может принимать значения 0, 1, 2.

a) x=0. Неравенство примет вид $\frac{0}{\sqrt{-3y+2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y+1}}\geq y^2-1$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+2>0\\ 2y+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<\frac{2}{3}\\ y>-\frac{1}{2}\end{cases}$. Значит y=0. Подставляя в неравенство, получаем $\frac{0}{\sqrt{2}}+\frac{0}{\sqrt{1}}\geq 0-1$ верное неравенство. Следовательно (0;0) решение.

b) x=1. Неравенство примет вид $\frac{1}{\sqrt{-3y+3}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y}}\geq y^2-1$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+3>0\\ 2y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<1\\ y>0\end{cases}$. Значит, целых y не существует.

c) x=2. Неравенство примет вид $\frac{4}{\sqrt{-3y+4}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y-1}}\geq y^2+3$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+4>0\\ 2y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<\frac{4}{3}\\ y>\frac{1}{2}\end{cases}$. Значит, y=1. Подставляя в неравенство, получаем $\frac{4}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}\geq 1+3$ верное неравенство. Следовательно (2;1) решение.

Рекомендации по проверке.

Присутствует только ответ без обоснования – 0 баллов.

Обоснованно получили, что $1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$ (или x=0;1;2 и только эти значения) – 4 балла.

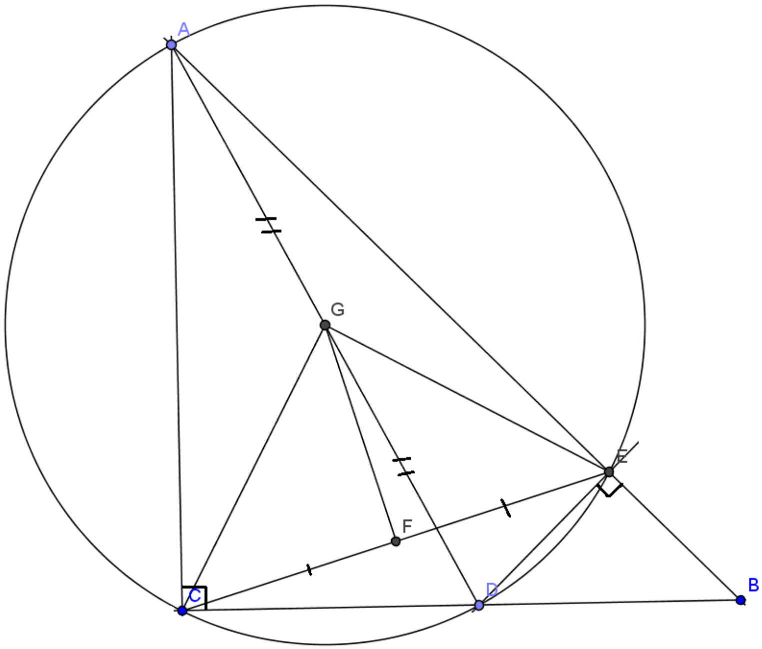
Предыдущие написано без обоснования – 0 баллов.

При переборе значений x, получено множество значений, которые может принимать у и без, соответствующей, проверке утверждается, что это решение – 5 баллов.

5. В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C$ – прямой) на стороне *BC* взята точка *D* так, что $\angle CAD=30^0$. Из точки *D* на *AB* опущен перпендикуляр *DE*. Найти расстояние между серединами отрезков *CE* и *AD*, если известно, что $AC=3\sqrt{3}$, $DB=4$.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{57}}{38}$

Решение.



Пусть точка *G* середина отрезка *AD*, а точка *F* середина отрезка *CE*, тогда необходимо найти длину отрезка *GF*.

Так $\angle ACB=\angle DEA=90^\circ$, то около четырехугольника *ACDE* можно описать окружность, причем G – центр данной окружности (*AD* – диаметр). Следовательно, CG=GE=GD (как радиусы окружности), то есть ΔCGD и ΔCGE равнобедренные, а значит *GF*– высота в ΔCGE .

Так как $\angle CAD=30^\circ$ – вписанный и опирается на дугу *CD*, а $\angle CGD$– центральный, опирающийся на ту же самую дугу, то $\angle CGD=60^\circ$, а значит ΔCGD – равносторонний.

Пусть $\angle EAD=\alpha$, тогда $\angle ECD=\alpha$ как вписанный опирающий на ту же самую дугу DE. Тогда $\angle GCF=60^{\circ}-\alpha$, $\angle CAB=30^{\circ}+\alpha$, следовательно $\angle CBA=90^{\circ}-(30^{\circ}+\alpha)=60^{\circ}-\alpha$. Таким образом получаем, что ΔCGF и ΔABC подобны по двум углам ($\angle CBA=\angle GCF=60^{\circ}-\alpha$, $\angle ACB=\angle GFC=90^{\circ}$).

Из подобия ΔCGF и ΔBAC следует, что $\frac{CG}{AB}=\frac{GF}{AC}\Rightarrow$ $GF=\frac{CG\cdot AC}{AB}=\frac{CD\cdot AC}{AB}$. Из ΔCAD получаем, что $AD=2CD$ (так как $\angle CAD=30^{\circ}$) и по теореме Пифагора $CD=3$, из ΔABC по теореме Пифагора $AB=2\sqrt{19}\Rightarrow GF=\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=\frac{9\sqrt{57}}{38}$

Рекомендации по проверке.

Замечено, что около четырехугольника $ACDE$ можно описать окружность, причем G – центр данной окружности −1 балл.

Если дополнительно к предыдущему вычислены стороны AB, CD , то+1 балл.