Всероссийская олимпиада школьников 2013г
II (муниципальный) этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 4 астрономических часа.
Максимальное количество баллов-35

Общие критерии оценки:

7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1

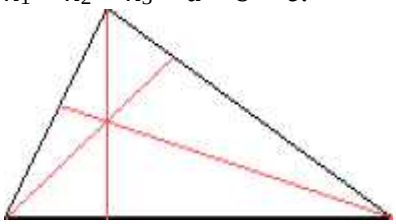
Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Пусть h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c соответственно. Тогда $h_1 \le b$, $h_2 \le c$, $h_3 \le a$,
причем хотя бы в одном из случаев неравенство строгое.
Сложив почленно эти три неравенства, получим:
$h_1 + h_2 + h_3 < a + b + c$.



Задание 2

Существуют ли такие целые числа x, y и z, для которых выполняется равенство:
$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2014$?

Количество баллов 7

Ответ: не существуют.

Решение

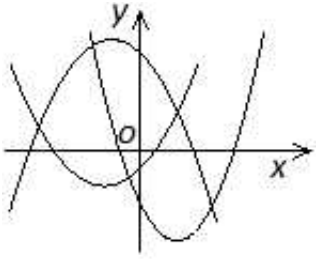
Раскрыв скобки и приведя подобные, получим: $-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3zy^2 + 3z^2x - 3zx^2 = 2014$.
Левая часть кратна 3, а правая – нет. Противоречие.

Замечание

Левая часть уравнения равна $3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Задание 3

На рисунке изображены графики трёх квадратных трёчленов. Можно ли подобрать такие числа *a*, *b* и *c*, чтобы это были графики трёхчленов $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$?



Количество баллов 7

Ответ: нельзя.

Решение

Пусть это удалось. У двух парабол "ветви" направлены вверх, а у одной – вниз, поэтому у двух трёхчленов старший коэффициент положительный, а у одного – отрицательный. Следовательно, среди чисел *a*, *b* и *c* должны быть два положительных и одно отрицательное. С другой стороны, две из парабол пересекают ось *Oy* в точках с отрицательными ординатами, а третья – в точке с положительной ординатой, поэтому у двух трёхчленов свободный член отрицательный, а у одного – положительный. Следовательно, среди чисел *a*, *b* и *c* должны быть два отрицательных и одно положительное. Противоречие.

Решение 2

Такие параболы имеют общую точку (1, $a + b + c$). Но на рисунке такой точки нет.

Задание 4

Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$.

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Докажем, что $3x^3 + 4 \geq 6x^2$.

Но $3x^3 + 4 = 2x^3 + x^3 + 4$.

Применяя неравенство Коши, получаем

$$2x^3 + x^3 + 4 \geq 3\sqrt[3]{(2x^3)(x^3)(4)} = 3 \cdot 2x^2 = 6x^2$$

ч.т.д.

Задание 5

Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них.

Количество баллов 7

Ответ:

Решение

Разобьём окружность с центром в точке *O* на шесть равных частей точками *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*. Понятно, что треугольники *OAB*, *OBC*, *OCD*, *ODE*, *OEF*, *OFA* - равносторонние. Проведём дугу окружности с центром в точке *A* радиуса *AB* от точки *B* до точки *O*. Аналогично проведём дуги окружностей с центрами в точках *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (см. рис.). Таким образом, мы разбили окружность на 6 равных частей. Теперь каждую из этих частей разобьём на две равные части одним из двух способов, изображённых на рисунке.

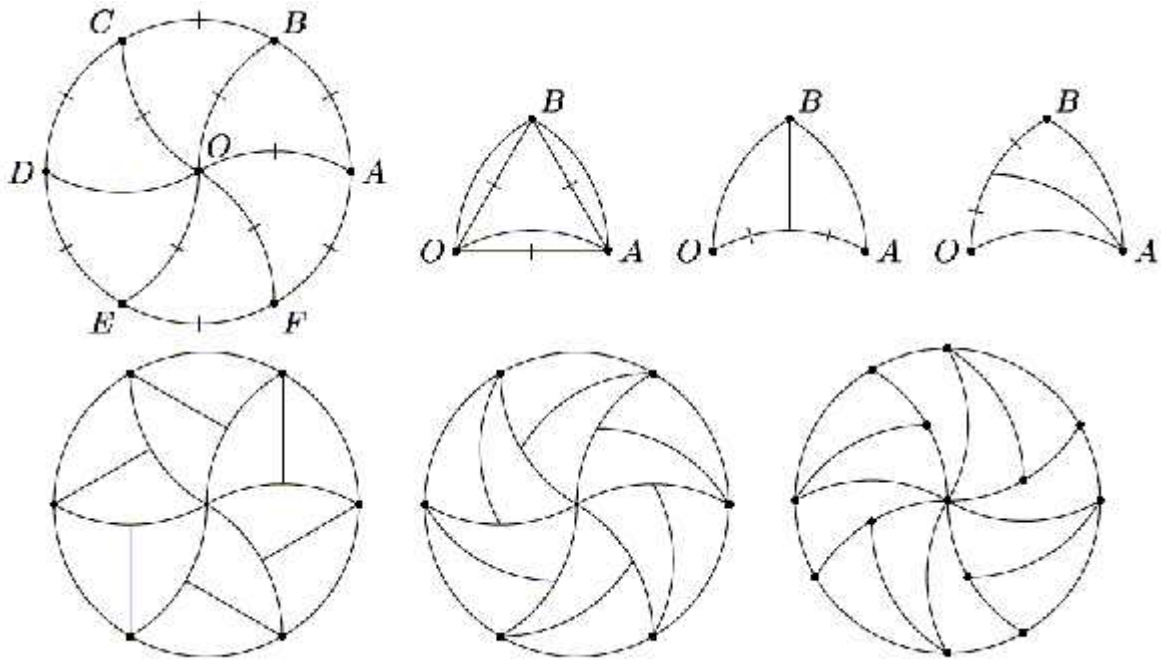


Рис. 8