РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II этап, 2013 год

11 класс

11.1. Докажите, что для любых x выполняется неравенство:

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0.$$

Перемножив в первую и четвертую скобки левой части неравенства, получим x^2-7x+6, перемножив вторую и третью, получим $x^2-7x+12$. Введем переменную $x^2-7x+9=t$. Левая часть неравенства примет вид $(t+3)(t-3)+10=t^2+1$ и, очевидно, является положительной.

11.2. В карьере заготовлено 120 гранитных плит по 7 т и 80 плит по 9 т. На железнодорожную платформу можно погрузить до 40 т. Какое наименьшее число платформ потребуется, чтобы вывезти все плиты?

Ответ. 40 платформ.

На одну платформу нельзя погрузить 6 плит даже по 7 т. Поэтому нужно, по крайней мере, 200/5 = 40 платформ. Сорока платформ достаточно: на каждую платформу можно погрузить 3 плиты по 7 т и 2 плиты по 9 т.

Комментарий. Обоснована необходимость не менее 40 платформ – 3 балла. Предложен пример распределения плит на 40 платформах – 3 балла.

11.3. Дробная часть положительного числа, его целая часть и само число образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите все такие числа.

Ответ. Такое число единственное $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Пусть a – искомое число, b – его целая часть, c – дробная, q – знаменатель прогрессии. Тогда $a=b+c$ и $cq^2=cq+c$. По условию $c>0$, сократив на c, получаем квадратное уравнение $q^2-q-1=0$, которое имеет два корня и один из них $q=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ больше 1. По условию целая часть числа больше ее дробной части, значит $b\geq 1$. С другой стороны, из неравенства $b=cq<1\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$ следует, что $b=1$ и искомое число $a=q=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

11.4. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трех цветов?

Ответ. 1530 способами.

Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую – одной из двух оставшихся. Третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первая доска 3 варианта, вторая 2, далее однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

11.5. Все ребра тетраэдра равны 12 см. Можно ли поместить его в коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 9см, 13 см и 15 см?

Ответ. Да.

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной a. Тетраэдр ACB_1D_1 имеет все ребра, равные $\sqrt{2}a$. Значит, тетраэдр с ребром 12 можно поместить в куб со стороной $6\sqrt{2}$. Поскольку $6\sqrt{2} < 9$ куб вместе с тетраэдром помещается в коробку.