РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II этап, 2013 год

8 класс

8.1. Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны 20.

Ответ: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

Комментарий. Приведенный ответ – 7 баллов.

8.2. Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

Ответ: 29.

В зале не более 29 рядов. Иначе класс в 30 человек можно рассадить по одному в ряду. С другой стороны, если класс в 26 человек рассадить по одному, то, по условию, по крайней мере три ряда окажутся пустыми, значит, рядов не менее 29.

Комментарий. Ответ без обоснования – 2 балл.

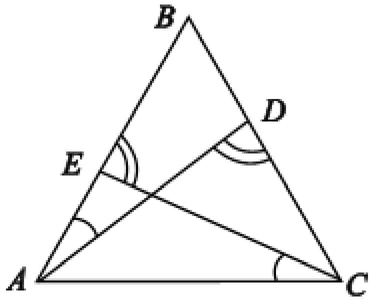
8.3. С тремя целыми числами сделали следующее: из одного числа вычли единицу, к другому прибавили единицу, а третье число возвели в квадрат. В результате получился такой же набор чисел. Найдите эти числа, если известно, что сумма чисел равна 2013.

Ответ: 1007, 1006, 0.

Обозначим числа исходного набора *a*, *b*, *c*. Получившийся набор будет $a-1$, $b+1$, c^2. Из того, что наборы совпадают, следует равенство $a+b+c=(a-1)+(b+1)+c^2$. Получаем $c=c^2$. То есть $c=0$ или $c=1$. Так как $c^2=c$, получаем $a-1=b$, $b+1=a$. Это означает, что возможны два случая $b+1, b, 0$ и $b+1, b, 1$. В первом случае получаем сумму $2b+1=2013$, которая приводит к ответу. Во втором случае получаем $2b+2=2013$. Противоречие – слева четное число, справа – нечетное.

Комментарий. Ответ без обоснования – 1 балл.

8.4. В треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *BC* точки *E* и *D* таковы, что отрезки *AD* и *CE* равны, $\angle BAD = \angle ECA$ и $\angle ADC = \angle BEC$. Найдите углы треугольника.



Ответ. Все углы равны 60°.

Треугольники *CEA* и *ADB* равны (по стороне и прилежащим углам). Значит, равны стороны *AC* и *AB* и равны углы *CAE* и *ABD*, то есть углы *CAB* и *ABC*. Это означает равенство сторон *AC* и *BC*. Таким образом, треугольник *ABC* – равносторонний.

8.5. Числа от 1 до 10 выписали в каком-то порядке и получили числа a_1, a_2, a_3, …, a_{10}, а затем вычислили суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + + a_3$, …, $S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди чисел S_1, S_2, S_3, …, S_{10}?

Ответ. 7.

Среди чисел от 1 до 10 – пять нечетных. Прибавление нечетного числа меняет четность суммы. Пусть y_1`, y_2, y_3, y_4, y_5 нечетные числа, в порядке появления на доске. После прибавления y_2 сумма станет четной и больше 2, как и после прибавления y_4. Эти суммы являются составными числами, как и $S_{10} = 55$. Значит, среди сумм простых чисел не более 7.

Пример записи чисел: 2, 1, 4, 3, 7, 6, 8, 10, 5, 9. Получившиеся суммы: **2**, **3**, **7**, 10, **17**, **23**, **31**, **41**, 46, 55.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 балл. Правильный ответ с примером – 3 балла (приведенный в решении пример не единственен). Оценка на количество простых сумм (без примера) – 3 балла.