РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II этап, 2013 год

9 класс

9.1. Найдите наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству $\frac{100}{|x|} > x^2 + 1$.

Ответ. -4.

Если $|x| \geq 5$, то $\frac{100}{|x|} \leq \frac{100}{5} = 20 < 26 \leq x^2 + 1$. Значит, целые числа, удовлетворяющие неравенству таковы, что $0 < |x| \leq 4$. Непосредственной проверкой $\frac{100}{|-4|} = 25 > 17 = (-4)^2 + 1$ убеждаемся в правильности ответа.

Комментарий. Правильный ответ без строгого обоснования до 2 баллов. Решено неравенство, но неправильно выбран ответ 2 балла.

9.2. Две машины одновременно выехали из одного пункта и едут в одном направлении. Одна машина ехала со скоростью 50 км/час, другая – 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на полтора часа позже чем вторую машину. Найдите скорость третьей машины.

Ответ. 60 км/час.

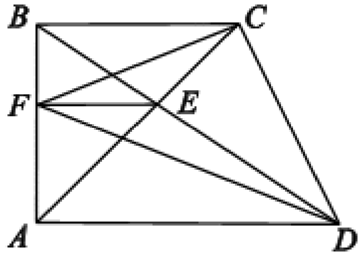
За полчаса первая машина проедет 25 км, вторая 20 км. Обозначим x скорость третей машины. Время за которое она догонит первую машину равно $\frac{25}{x-50}$, а вторую $\frac{20}{x-40}$. Получаем уравнение $\frac{25}{x-50} - \frac{20}{x-40} = \frac{3}{2}$ и из него $x = 60$.

Комментарий. Верно составлены уравнение или система уравнений, соответствующие условию – 2 балла.

9.3. Вася написал на доске несколько натуральных чисел. Петя подписал под каждым Васиным числом его квадрат. После чего Маша сложила все числа, написанные на доске, и получила 111. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

Пусть a одно из чисел, написанных Васей. Тогда Петя подписал под ним число a^2. Сумма этих двух чисел $a + a^2 = a(a+1)$ есть произведение двух последовательных натуральных чисел, то есть четное число. Сумма любого количества четных чисел есть четное число, но 111 – нечетное число. Значит, что кто-то из ребят ошибся.

9.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол B – прямой, E – точка пересечения диагоналей, точка F – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AB. Докажите, что углы CFE и DFE равны.



Поскольку EF перпендикулярно AB, достаточно заметить равенство углов BFC и AFD. Из параллельности AD и FE и теоремы Фалеса получаем равенство $\frac{BF}{AF}=\frac{BE}{DE}$. В треугольниках CEB и AED имеет место равенство углов C и A, B и D, как накрест лежащих углов. Это означает, что треугольники CEB и AED подобные и $\frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AD}$. Поэтому получаем равенство $\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AD}$ и подобие треугольников BFC и AFD. Тем самым есть равенство углов BFC и AFD.

9.5. На столе лежит куча из 2013 монет. Из нее убирают одну монету и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной монеты, снова убирают одну монету и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех монет?

Ответ: нет.

После каждой процедуры число монет уменьшается на 1, а число кучек на 1 увеличивается. Поскольку первоначально монет было 2013, а кучка одна, то после n процедур монет окажется $2013 - n$, а кучек станет $n+1$. В задаче требуется, чтобы выполнилось равенство: $2013 - n = 3(n + 1)$ или $2010 = 4n$, что невозможно, поскольку правая часть кратна 4, а левая – нет.