

9 класс

1. Было 2013 пустых коробок. В некоторую из них положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга). Таким образом, стало 2026 коробок. В некоторую из них снова положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга) и т.д. После нескольких таких операций стало 2013 непустых коробок. Сколько всего стало коробок? Ответ: 28182.

Решение.

После каждой операции количество непустых коробок увеличивается на 1. Вначале непустых коробок не было. Значит, всего было сделано 2013 операций. За каждую операцию прибавляется 13 новых коробок. Стало $2013 + 13 \times 2013 = 2013 \times 14 = 28182$.

Рекомендации по проверке.

Только ответ или вычисления без комментариев: 1 балл.

2. Докажите, что неравенство $x^2 - 2x\sqrt{y-5} + y^2 + y - 30 \geq 0$ выполняется при любых допустимых значениях x и y .

Решение. ОДЗ: x – любое число, $y \geq 5$.

$$x^2 - 2x\sqrt{y-5} + y^2 + y - 30 = (x - \sqrt{y-5})^2 + y^2 - 25 \geq 0,$$

так как $(x - \sqrt{y-5})^2 \geq 0$ и $y^2 - 25 \geq 0$ при $y \geq 5$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2(y + y^2) = y^3 + x^4.$$

Решение.

$$x^2y + x^2y^2 - y^3 - x^4 = 0,$$

$$x^2y - x^4 + x^2y^2 - y^3 = 0,$$

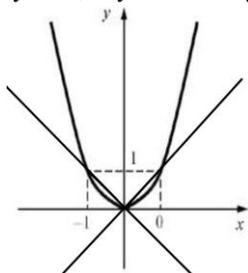
$$x^2(y - x^2) + y^2(x^2 - y) = 0,$$

$$(x^2 - y^2)(y - x^2) = 0,$$

$$(x - y)(x + y)(y - x^2) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому множество точек, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, есть объединение графиков трех уравнений:

$$y = x, \quad y = -x \quad \text{и} \quad y = x^2.$$

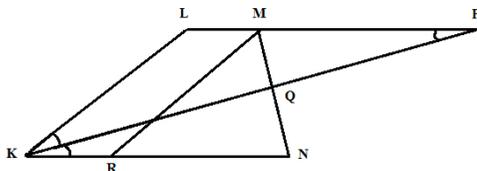


Рекомендации по проверке.

1. Получено разложение на множители: 3 балла.
2. При преобразованиях уравнения производится какое-нибудь сокращение, в результате чего теряется одна из двух прямых или парабола: 1 балл.

4. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны соответственно 15 и 12, а основание $LM=3$. Биссектриса угла NKL проходит через середину стороны MN . Найдите площадь трапеции.
 Ответ: 80.

Решение.



Пусть Q – середина отрезка MN . Продолжим биссектрису угла NKL до пересечения с прямой LM в точке P . $\angle NKQ = \angle QKL$.

$\angle NKQ = \angle KPL$ (накрестлежащие). Тогда $\angle QKL = \angle KPL$ и $\triangle KPL$ – равнобедренный. $KL = LP$. Тогда $MP = KL - ML = 12$.
 $\triangle KQN = \triangle MPQ$ ($MQ = QN$, $\angle KQN = \angle MQP$, $\angle KNQ = \angle QMP$).
 Тогда $KN = MP = 12$.

Проведем $MR \parallel KL$ ($R \in KN$). $MR = KL = 15$, $MN = 12$,
 $RN = KN - ML = 12 - 3 = 9$, $12^2 + 9^2 = 15^2$. Значит, $\angle MNR = 90^\circ$ и MN –
 высота трапеции.

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} (KN + ML) \cdot MN = \frac{1}{2} (3 + 12) \cdot 12 = 80.$$

Рекомендации по проверке.

Найдено основание KN : 4 балла.

Найдена высота трапеции: 3 балла.

Арифметическая ошибка: -1 балл.

5. В клетках таблицы с 10 строками и 10 столбцами стоят числа $+1$ и -1 . Берутся произведения чисел, стоящих в каждом столбце и в каждой строке. Докажите, что сумма этих 20 произведений не может равняться двум.

Решение.

1 способ.

Заполним таблицу единицами, тогда сумма произведений равна 20. И будем заменять 1 на -1 . Сумма при этом или уменьшается на 4, или не меняется или увеличивается на 4, так как одна клетка участвует в двух произведениях, то в сумме два слагаемых изменятся на противоположные. Например: было $S_1 = A + 1 + 1$, стало $S_2 = A - 1 - 1$ или было $S_3 = A + 1 - 1$, стало $S_4 = A - 1 + 1$ или было $S_5 = A - 1 - 1$, стало $S_6 = A + 1 + 1$. Поэтому, $S_2 - S_1 = -4$, $S_4 - S_3 = 0$, $S_6 - S_5 = 4$, и из 20 получить 2 нельзя.

2 способ.

Допустим, что сумма равна двум. Тогда среди 20 произведений 11 чисел $+1$ и 9 чисел -1 . Пусть среди произведений по строкам x чисел $+1$ и y чисел -1 ($x + y = 10$). Тогда среди произведений по столбцам $11 - x = 11 - (10 - y) = y + 1$ чисел $+1$ и $9 - y = 9 - (10 - x) = x - 1$ чисел -1 . Тогда произведение всех чисел таблицы с одной стороны равно $(-1)^y$, а с другой стороны $(-1)^{x-1}$. Так как $x + y = 10$, то числа x и y одной четности, а значит числа $x - 1$ и y разной четности. Поэтому произведение всех чисел таблицы с

одной стороны равно 1, а с другой стороны -1. Получили противоречие.