10 класс

1. Найдите последнюю цифру числа $2015^2 - 2014^2 - 2013^2$.

2. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна произведению 2014·2015?

3.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 + 2y, \\ x^{2014} + y^{2014} = 2^{2015}. \end{cases}$$

4. При каком наименьшем натуральном k квадратичный трехчлен $y = kx^2 - px + q$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два различных положительных корня меньших 1?

5. Точка Q лежит вне окружности μ_1. QA и QB - касательные к окружности (A и B принадлежат μ_1). Через точки A и B проведена вторая окружность μ_2 с центром в точке Q. На дуге AB окружности μ_2,

находящейся внутри окружности μ_1, взяли произвольную точку K. Прямая AK пересекает второй раз окружность μ_1 в точке C, а прямая BK - в точке D. Докажите, что CD - диаметр окружности μ_1.

6. Треугольник *A* содержится в выпуклом четырехугольнике B. Пусть *S(A)* и *S(B)* — площади этих многоугольников, а *P(A)* и *P(B)* — их периметры. Доказать, что $\dfrac{S(A)}{S(B)} < \dfrac{P(A)}{P(B)}$. Замечание: фигура называется выпуклой, если с каждой парой точек она содержит и отрезок их соединяющий.

Решения

1. Найдите последнюю цифру числа $2015^2 - 2014^2 - 2013^2$.

Решение: Последняя цифры степеней определяются возведением последних чисел оснований. Поэтому последняя цифра числа 2015^{2015} равна 5. Последние цифры степеней 4 периодичны с периодом 2. У нечетных степеней 4, у четных 6. У степеней 3 повторение через 4: 3, 9, 7, 1. Так как при делении на 4 2013 дает в остатке 1, то последняя цифра у последнего числа будет 3. Итог: $\ldots 5 - \ldots 6 - \ldots 3 = \ldots 6$.

Рекомендации по проверке.

Ответ без обоснования – 0 баллов.

2. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 2014·2015?

Решение. 2014·2015 дает при делении на 3 остаток 2.

Число при делении на 3 дает такой же остаток, что и сумма его цифр. Но квадрат натурального числа не может при делении на 3 остаток 2:

$(3k)^2$ делится на 3;

$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ при делении на 3 дает остаток 1;

$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ при делении на 3 дает остаток 1.

Значит, такого натурального числа не существует.

Рекомендации по проверке.

Ответ без доказательства – 0 баллов.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 + 2y \\ x^{2014} + y^{2014} = 2^{2015} \end{cases}$$

Решение. Функция $f(t) = t^3 + 2t$ монотонно возрастающая на всей числовой прямой как сумма двух монотонно возрастающих функций $f_1(t) = t^3$ и $f_2(t) = 2t$. Поэтому из первого уравнения имеем $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Равенство $x = y$ можно получить также разложением на множители выражения $x^3 + 2x - y^3 - 2y = 0 \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$. Поскольку $x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + y/2)^2 + 2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, то $x = y$. Подставляя во второе уравнение системы $y = x$, получим $x = \pm 2$. Ответ. $\mathrm{x} = \mathrm{y} = \pm 2$

Рекомендации по проверке.

Если приведен только ответ - 0 баллов.

Если решение найдено, но нет доказательства существования других решений – 4 балла.

Полное верное решение -7 баллов.

4. При каком наименьшем натуральном k квадратичный трехчлен $y = kx^2 - px + q$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два различных положительных корня меньших 1?

Решение. Сначала оценим коэффициент k снизу. Пусть $0 < x_1 < x_2 < 1$ корни квадратичного трехчлена, тогда $y = kx^2 - px + q = k(x - x_1)(x - x_2)$, из условия расположения корней и $k \geq 1$ вытекает, что $y(1) \geq 1$ и $y(0) \geq 1$. Так как $y(0) = kx_1x_2 = q \geq 1$, то $y(1)y(0) = k^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1$.

Далее воспользуемся оценкой $x(1-x) < \frac{1}{4}$ справедливой для всех $x \neq \frac{1}{2}$.

В нашем случае $0 < x_1 < x_2 < 1$, откуда получаем $x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16}$. Следовательно,

$\frac{1}{16}k^2 > k^2 x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geq 1 \Rightarrow k > 4$. Таким образом, получена оценка снизу. Покажем точность оценки, для этого достаточно построить пример с $k = 5$: $y = 5x^2 - 5x + 1$.

Рекомендации по проверке. Построен только пример, без оценки - 3 балла;

Получена только оценка (без примера) – 4 балла.

Рекомендации по проверке.

Построен только пример, без оценки - 3 балла;

Получена только оценка (без примера) – 4 балла.

5. Точка Q лежит вне окружности μ_1. QA и QB - касательные к окружности (A и B принадлежат μ_1). Через точки A и B проведена вторая окружность μ_2 с центром в точке Q. На дуге AB окружности μ_2, находящейся внутри окружности μ_1, взяли произвольную точку K. Прямая AK пересекает второй раз окружность μ_1 в точке C, а прямая BK - в точке D. Докажите, что CD - диаметр окружности μ_1.

Решение. Пусть $\angle AQB = \overset{\smile}{AKB} = \sim$. Тогда

$$\angle AKB = \frac{360^\circ - \sim}{2} = 180^\circ - \frac{\sim}{2}.$$

Из ΔAQB $\angle QAB = \angle QBA = 90^\circ - \frac{\sim}{2}$.

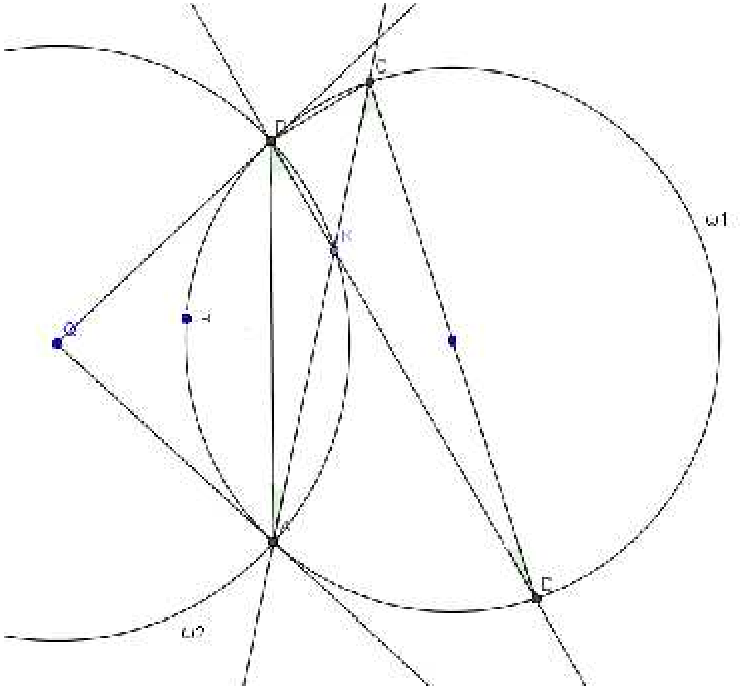
С другой стороны, $\angle QAB$ - угол между касательной QA и секущей AB окружности μ_1. Следовательно, $\angle QAB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{APB} = \angle ACB$.

Из ΔBKC

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle ACB - \angle BKC = 180^\circ - \angle ACB - \left(180^\circ - \angle AKB\right) =$$

$$= \angle AKB - \angle ACB = \left(180^\circ - \frac{\sim}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\sim}{2}\right) = 90^\circ.$$

Следовательно, CD - диаметр окружности μ_1.



Рекомендации по проверке.

Найдена связь между $\angle AQB$ и $\angle AKB$:

+2 балла.

Найдена связь между $\angle QAB$ ($\angle QBA$) и $\angle BCA$ ($\angle ADB$):

+2 балла.

6. Треугольник A содержится внутри выпуклого многоугольника B. Пусть S(A) и S(B) — площади, а P(A) и P(B) периметры этих фигур.

Доказать, что $\dfrac{S(A)}{S(B)} < \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

Решение. Впишем в треугольник *A* окружность радиуса $R=2S(A)/P(A)$ с центром в точке *O* . Теперь соединим центр *O* круга с вершинами m-угольника *B*. Тогда m-угольник *B* разобьётся на треугольники с площадями $h_i b_i/2$, где h_i — расстояние от точки *O* до *i*-й стороны, а b_i — длина *i*-й стороны m-угольника B. Так как $h_i \geq R$, то $2S(B) = h_1b_1 + h_2b_2 + \ldots + h_mb_m < R(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) = RP(B)$.

Откуда получаем $R=2S(A)/P(A)<2\,S(B)/P(B)$.