Всероссийская олимпиада школьников 2014 г
Муниципальный этап
Математика
Критерии
10 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 мин).

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1
На карточках написаны все числа от 11111 до 99999 включительно. Затем эти карточки выложили в цепочку в произвольном порядке. Докажите, что полученное 444445-значное число не является степенью двойки.
Количество баллов 7
Ответ:
Решение
Легко доказать, что это число делится на 11111, пользуясь тем, что числа $10^5 A$ и A при любом целом A дают одинаковые остатки при делении на 11111, а сумма 11111+11112+...+99998+99999 делится на 11111.
Но если число делится на 11111, то оно, конечно, не может быть степенью двойки.

Задание 2
Числа x, y, z удовлетворяют равенству:

$$x+y+z-3(xy+yz+xz)+9xyz=\frac{1}{3}$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{3}$.

Количество баллов 7
Решение
Заметим, что:

$$x+y+z-3(xy+yz+xz)+9xyz-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x-1)(3y-1)(3z-1)$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю.
Значит, одно из чисел x, y, z равно $\frac{1}{3}$.

Комментарий.
Как догадаться до разложения на множители?
Обозначим левую часть через $P(x, y, z)$.

Если многочлен от переменной x тождественно обращается в нуль при $x = a$, то он делится на $x – a$. Если $x = 1/3$, то $P(x, y, z) = 0$.
Значит, $P(x, y, z)$ делится на $x – 1/3$.
Аналогично, $P(x, y, z)$ делится на $y – 1/3$ и $z – 1/3$.
Поэтому $P(x, y, z)$ равен $(x – 1/3)(y – 1/3)(z – 1/3)$ с точностью до умножения на константу.

Задание 3
Многоэтажная дробь (цепная дробь) содержит 2014 двоек и 2014 троек. Верно ли что она больше 1?

$$\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{\ddots+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2}}}}}}$$

Количество баллов 7
Ответ: нет, неверно
Решение
Будем упрощать эту дробь снизу.
Получим последовательно

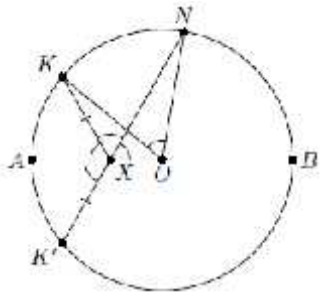
$$\frac{3}{2}>1,\quad \frac{3}{2+\frac{3}{2}}=\frac{6}{7}<1,\quad \frac{3}{2+\frac{6}{7}}=\frac{21}{20}>1,\quad \ldots$$

Очевидно, что эти дроби поочередно больше и меньше единицы, так как значение следующей дроби «y» выражается через значение предыдущей «x» по формуле

$$y=\frac{3}{2+x}$$

Поэтому дробь с номером 2014, равная исходной, меньше единицы.

Задание 4
Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB, а $\angle KXA = \angle NXB = 60°$.
Найдите длину отрезка KN.
Количество баллов 7
Ответ: $KN = R$.
Решение
Рассмотрим точку K', симметричную точке K относительно диаметра AB (см. рисунок). Она лежит на той же окружности и $\angle KXA = 60°$. Тогда сумма трёх углов с вершиной в точке X (отмеченных на чертеже) равна 180°. Следовательно, точки K', X и N лежат на одной прямой.



Треугольник $K'XK$ – равнобедренный с углом 120° при вершине. Следовательно, вписанный угол $KK'N$ равен 30°, а центральный угол KON равен 60°. Таким образом, $KN = R$.

Задание 5

Укажите все точки плоскости (x, y), через которые проходит хотя бы одна кривая множества линий (парабол), заданных уравнениями $y = p^2 + (2p - 1)x + 2x^2$.

Количество баллов 7

Ответ: все точки над параболой $y = x^2 - x$, включая саму параболу.

Решение

Точка (x, y) лежит на одной из указанных кривых тогда и только тогда, когда уравнение $p^2 + 2px + (2x^2 - x - y) = 0$ имеет решение (относительно p), то есть когда $D/4 = x^2 - (2x^2 - x - y) = y + x - x^2 \geq 0$. То есть $y \geq x^2 - x$