10 класс

10.1.Решите уравнение $x(x-1)(x-2)+(100-x)(99-x)(98-x)=0$.

<u>Ответ</u>: нет решений. **<u>Указание</u>**. См. задачу 9.1.

10.2.На доске записано несколько целых чисел. Коля заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного –удвоенное. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел и сумма исходных совпали, если сумма исходных чисел равнялась **а)** 2014; **б)** 2013?

<u>Ответ</u>: **а)** не могло; **б)** могло. **<u>Указание</u>** : см. задачу 9.2

10.3.Два корабля идут по морю перпендикулярными курсами так, что оба должны пройти через фиксированную точку *O* (каждый – в свой момент времени. После прохождения точки *O* корабли, не останавливаясь, продолжат своё прямолинейное движение). Скорости кораблей одинаковы и постоянны. В полдень корабли еще не прошли точку *O* и находились от нее в 20 км и 15 км соответственно. Будут ли корабли далее в какой-то момент в зоне видимости друг друга, если видимость в этот день 4 км?

<u>Ответ</u>: да, будут. **<u>Указание</u>**. См. задачу 9.4.

10.4.Дан треугольник *ABC*. Точка *P* – центр вписанной окружности. Найдите угол *B*, если известно, что $R_{ABC}=R_{APC}$, где R_{ABC}, R_{APC} – радиусы описанных окружностей треугольников *ABC* и *APC* соответственно.

<u>Ответ</u>: 60°. **<u>Указание</u>**. Пусть $\alpha=\angle ABC$. Тогда $\angle APC=90°+\frac{\sim}{2}$, поскольку $\angle APC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-\alpha)$. Пусть $R=R_{ABC}=R_{APC}$. По известной формуле (для теоремы синусов) $AC=2R\sin\alpha$ (в треугольнике *ABC*) и $AC=2R\sin\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right)$ (в треугольнике *APC*). Отсюда получаем уравнение $\sin\alpha=\sin\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow$ $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=30°$ (т.к. ~ <180°).

10.5. а) Докажите неравенство $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}<\sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел *n*; **б)** существует ли такое натуральное *n*, для которого $[\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}]<[\sqrt{9n+3}]$, где [*a*] означает целую часть числа *a*?

<u>Ответ</u>: **б)** не существует. **<u>Указание</u>**. **а)** После возведения обеих частей в квадрат и отделения квадратного корня получим равносильное неравенство $2\sqrt{n(n+1)}<2n+1\Leftrightarrow$ $4n(n+1)<4n^2+4n+1\Leftrightarrow 0<1$. **б)** Предположим, от противного, что такое *n* существует. Тогда для некоторого натурального *k* будет выполнено двойное неравенство $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}<k\le\sqrt{9n+3}$. Рассмотрим неравенство $k\le\sqrt{9n+3}\Leftrightarrow\ k^2\le 9n+3$. Заметим, что квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 при делении на 9 (можно перебрать все возможные остатки, это числа 0, 1, 4, 7). Значит, неравенство $k^2\le 9n+3$ означает фактически, что $k^2\le 9n+1\Leftrightarrow k\le\sqrt{9n+1}$. Поэтому получаем $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}<\sqrt{9n+1}$, что приводит к противоречию, т.к. на самом деле правая часть меньше левой при всех *n* (это доказывается точно так же, как в пункте а)).