11.1. В школе провели единую контрольную работу по математике среди всех одиннадцатиклассников. В результате 5/8 учащихся получили пятёрки, 11/20 от числа отличников – четвёрки, а остальные трое одиннадцатиклассников не пришли на контрольную по болезни. Сколько одиннадцатиклассников учится в школе.

Ответ: 96.

Доля учеников, получивших четверки 55/160. Доля учеников, получивших пятерки и четверки 5/8 + 55/160 = 155/160. Таким образом, доля пропустивших экзамен равна 5/160 = 1/32. Обозначим N – количество одиннадцатиклассников, тогда из условия $N/32 = 3$ и $N = 96$.

11.2. Про углы треугольника ABC известно, что $\sin A + \cos B = \sqrt{2}$ и $\cos A + \sin B = \sqrt{2}$. Найдите величину угла C.

Ответ: 90°.

Первый способ. Возведем оба равенства в квадрат и сложим. После преобразований получим $\sin(A+B) = 1$, то есть $A + B = 90°$.

Второй способ. Сложив исходные равенства, получим $\sin(A+45^\circ) + \sin(B+45^\circ) = 2$, откуда $\sin(A+45^\circ) = \sin(B+45^\circ) = 1$. Следовательно, $A = B = 45°$. Значит, $C = 90°$.

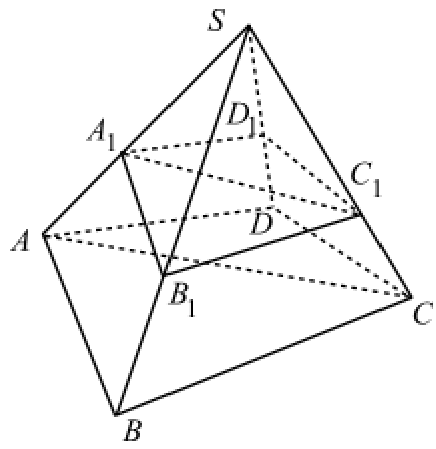
11.3. Решите уравнение $20[x] - 14\{x\} = 2014$ ($[x]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}$ – дробная часть числа x: $\{x\} = x - [x]$).

Ответ: $x = 101\frac{3}{7}$.

Из неравенства $0 \le \{x\} < 1$ следует $0 \le 14\{x\} < 14$, $0 \le 20[x] - 2014 < 14$. Прибавим 2014, поделим на 20 и получим $\frac{2014}{20} \le [x] < \frac{2028}{20}$ или $100{,}7 \le [x] < 101{,}4$. Таким образом, $[x] = 101$, $\{x\} = \frac{20 \cdot 101 - 2014}{14} = \frac{3}{7}$ и $x = 101 + \frac{3}{7}$.

Второе решение. Из условия следует, что число $14\{x\}$ должно быть целым, значит, это одно из чисел 0, 1, 2, …, 13. При этом его сумма с 2014 должна делиться на 20. Значит, $14\{x\} = 6$, $[x] = \frac{2014+6}{20} = 101$.

11.4. В четырехугольной пирамиде площади боковых граней равны между собой. Плоскость, пересекающая боковые рёбра, отсекает меньшую пирамиду, у которой площади боковых граней также равны между собой. Докажите, что основания этих пирамид – параллельны.



Пусть $SABCD$ данная пирамида, $A_1B_1C_1D_1$ сечение пирамиды плоскостью. Поскольку площади треугольников ASB, BSC равны получим $\frac{AS\cdot SB\cdot\sin\angle ASB}{2}=\frac{BS\cdot SC\cdot\sin\angle BSC}{2}$ значит $\frac{AS}{SC}=\frac{\sin\angle BSC}{\sin\angle ASB}$. Точно также из равенства площадей треугольников A_1SB_1, B_1SC_1 получим $\frac{A_1S}{SC_1}=\frac{\sin\angle BSC}{\sin\angle ASB}$. Отсюда следует, что $\frac{AS}{SC}=\frac{A_1S}{SC_1}$, а поскольку у треугольников ASC и A_1SC_1 угол S общий – треугольники подобны, а их стороны AC и A_1C_1 параллельны. Аналогично доказывается параллельность BD и B_1D_1. Поскольку в основаниях пирамид диагонали попарно параллельны, получаем параллельность оснований.

11.5. На вечеринке собралось 16 человек. Фотограф сделал несколько фотографий так, что каждая пара человек появилась ровно на одной фотографии вместе. На каждой фотографии сфотографированы либо трое, либо двое из присутствующих. Докажите, что всего сделано не менее 46 фотографий.

Всего есть 120 пар. Если есть k тройных фотографий, то двойных $120–3k$, итого фотографий $120–2k$. Человек A участвует в 15 парах. На его тройных фотографиях представлены две такие пары, поэтому тройных фотографий с участием A – не более 7, а всего тройных фотографий – не более $\frac{7\cdot 16}{3}=37\frac{1}{3}$, т.е. $k\le 37$. Отсюда общее число фотографий $120–2k\ge 46$.