8 класс

№1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 2x_2, \\ 1 + x_2^2 = 2x_3, \\ 1 + x_3^2 = 2x_4, \\ 1 + x_4^2 = 2x_1. \end{cases}$$

Решение: Сложив все уравнения, получим $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 = 0$. Это равенство возможно только, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, что и дает единственный ответ.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

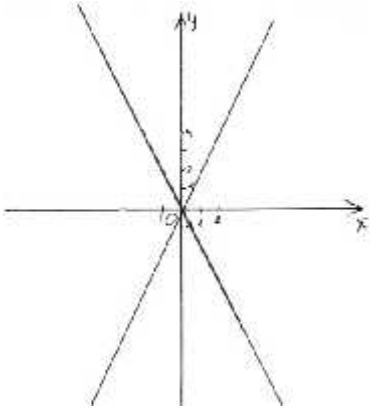
7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца или допущена вычислительная ошибка или описка.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№2. Постройте график уравнения $y^2 = 4x^2$.

Решение: $4x^2 - y^2 = 0$, $(2x-y)(2x+y)=0$ $\left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = -2x. \end{array}\right.$



7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – построены вспомогательные графики, помогающие в решении задачи.

№3. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 30°. Биссектриса угла *A* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *D*, при этом *AC* = *CD* = 1см. Найдите величину угла *ADC*.

Решение: В треугольнике *ABC* угол *B* равен 30°. Биссектриса угла *A* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *D*, при этом *AC* = *CD* = 1см (рис 1)

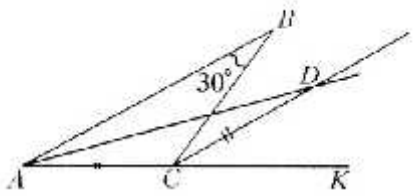


рис. 1

1) Треугольник *ACD* равнобедренный (*AC* = *CD*), углы при основании *AD* равны между собой. Поскольку *AD* – биссектриса угла *BAC*, то $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$.

2) Угол *BCK* – внешний угол треугольника при вершине *C*,$\angle BCK$ = 180°-$\angle C$; луч *CD* делит этот угол пополам, следовательно, $\angle DCK = \frac{1}{2}(180° - \angle C)$.

3) Угол *DCK* – *внешний угол треугольника ADC*,он равен сумме внутренних углов, с ним не смежных, то есть $\frac{1}{2}(180° - \angle C) = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A$, откуда $\angle A = 90° - \frac{1}{2}\angle C$. (1)

4) Сумма углов треугольника *ABC* равна 180°, угол *B* равен 30°, значит $\angle A + \angle C = 150°$.(2)

Из (1) и (2) находим $\angle C = 120°$ и $\angle A = 30°$

$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle A = 15°$.

Ответ: $\angle ADC = 15°$.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№4. Докажите, что если разность *a* – *b*, где $a \in Z$, $b \in Z$, делится на 3,то $a^3 - b^3$ делится на 9.

Доказательство: Разложим разность кубов на множители:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a + b^2)$$

Представим трехчлен $a^2 + a + b^2$в виде суммы, в которой первое слагаемое является квадратом двучлена *a* – *b*:

$a^2+ab+b^2 = a^2+ab+b^2-2ab+2ab = (a-b)^2 + 3ab$.

Так как *a* – *b* делится на 3, то и $(a-b)^2$ также делится на 3, а значит, сумма $(a-b)^2 + 3ab$ делится на 3. Тогда произведение (а значит и a^3-b^3) делится на 3⋅ 3=9

7 баллов – задание выполнено верно.

3 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

№5. Один из школьников – Алик, Боря, Витя или Гоша – разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали следующие противоречивые ответы:

Алик: стекло разбил Витя.

Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали.

Витя: Боря стекла не разбивал.

Гоша: это сделал Боря.

Можно ли по этим ответам однозначно определить виновника, если солгать мог только он сам, а также не более чем один из остальных троих?

Решение: Заметим, что если у какого-либо школьника имеются два защитника из числа остальных троих, то он заведомо не виноват, поскольку хотя бы один из двух его защитников, согласно условию, точно говорит правду. Алика и Витю защитили двое (явно Боря и косвенно Гоша), Борю – также двое (явно Витя и косвенно Алик). А Гошу защитил только один (косвенно Алик), следовательно, стекло мог разбить только Гоша.

Ответ: стекло мог разбить только Гоша.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов - решение в целом верное, однако, оно содержит одну логическую ошибку.

2 балла - найден верный ход решения, но решение не доведено до конца.