Решения

1. Найдите последнюю цифру числа $2015^{2} - 2014^{2} - 2013^{2}$.

**Решение:** Последняя цифры степеней определяются возведением последних чисел оснований. Поэтому последняя цифра числа $2015^{2015}$ равна 5. Последние цифры степеней 4 периодичны с периодом 2. У нечетных степеней 4, у четных 6. У степеней 3 повторение через 4: 3, 9, 7, 1. Так как при делении на 4 2013 дает в остатке 1, то последняя цифра у последнего числа будет 3. Итог: $\ldots 5 - \ldots 6 - \ldots 3 = \ldots 6$.

**Рекомендации по проверке.**

Ответ без обоснования – 0 баллов.

**2.** Известно, что $a+b+c=0$ и $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=-\dfrac{1}{abc}$.

Найдите

а) $a^2+b^2+c^2$;

б) $a^4+b^4+c^4$.

**Решение**. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=-\dfrac{1}{abc} \Rightarrow bc+ac+ab=-1.$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2.$$

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right).$$

$$(ab+bc+ac)^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2\left(ab^2c+a^2bc+abc^2\right)=$$

$$=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(b+a+c)=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \Rightarrow$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=1.$$

$$a^4+b^4+c^4=4-2=2.$$

**Рекомендации по проверке.**

Найдено $a^2+b^2+c^2$: 3 балла.

Найдено $a^4+b^4+c^4$: +4 балла.

**3.** Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 2014·2015?

**Решение.** 2014·2015 дает при делении на 3 остаток 2.

Число при делении на 3 дает такой же остаток, что и сумма его цифр. Но квадрат натурального числа не может при делении на 3 остаток 2:

$(3k)^2$ делится на 3;

$(3k+1)^2=9k^2+6k+1$ при делении на 3 дает остаток 1;

$(3k+2)^2=9k^2+12k+4$ при делении на 3 дает остаток 1.

Значит, такого натурального числа не существует.

**Рекомендации по проверке.**

Ответ без доказательства – 0 баллов.

**4.** $f(x) = x^2 + mx + n$ - квадратичная функция ( $m$ и $n$ - целые числа). Известно, что $f(2014) > 0$ и $f(2015) > 0$. Докажите, что $f(x) > 0$ для всех $x$ из отрезка $[2014;2015]$.

**Решение.** Докажем методом от противного. Пусть существует $x \in [2014;2015]$ такое, что $f(x) \le 0$. Тогда абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 + mx + n$ $x_в \in (2014;2015)$, и квадратный трехчлен имеет корни $x_1$ и $x_2$ $\in (2014;2015)$ (корни могут совпадать).

$x_в = -\dfrac{m}{2} \Rightarrow m$ - нечетное.

$0 \le D = m^2 - 4n = (x_1 - x_2)^2 < 1.$

Разность нечетного и четного числа не может принадлежать промежутку $[0;1)$.
Противоречие.

**Рекомендации по проверке.**
Доказана нечетность *m*: +1 балл.
Доказано, что $D \in [0;1)$ : +2 балла.

**5.** Точка $Q$ лежит вне окружности $\mu_1$. $QA$ и $QB$ - касательные к окружности ( $A$ и $B$ принадлежат $\mu_1$ ). Через точки $A$ и $B$ проведена вторая окружность $\mu_2$ с центром в точке $Q$. На дуге $AB$ окружности $\mu_2$, находящейся внутри окружности $\mu_1$, взяли произвольную точку $K$. Прямая $AK$ пересекает второй раз окружность $\mu_1$ в точке $C$, а прямая $BK$ - в точке $D$. Докажите, что $CD$ - диаметр окружности $\mu_1$.

**Решение.** Пусть $\angle AQB = A\breve{K}B = \sim$ . Тогда

$$\angle AKB = \frac{360^\circ - \sim}{2} = 180^\circ - \frac{\sim}{2}.$$

Из $\Delta AQB$ $\angle QAB = \angle QBA = 90^\circ - \dfrac{\sim}{2}$.

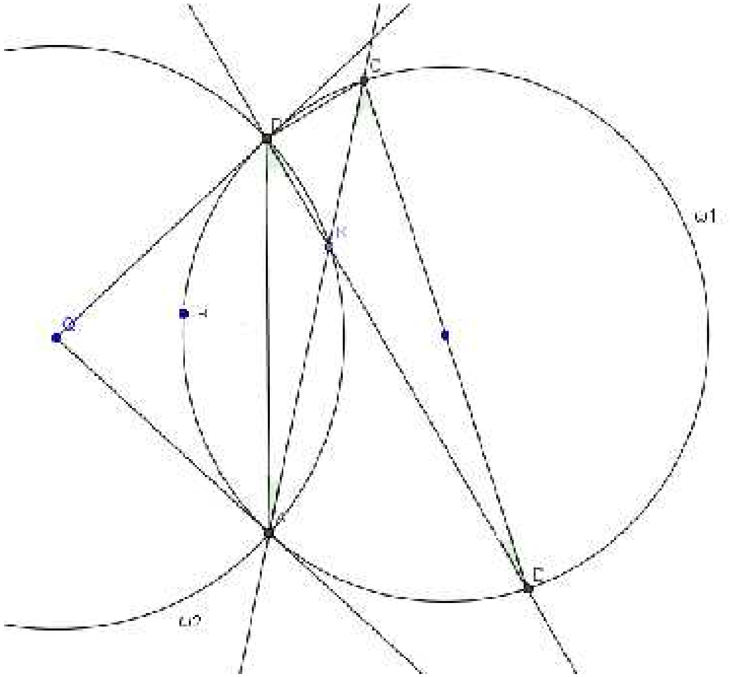
С другой стороны, $\angle QAB$ - угол между касательной $QA$ и секущей $AB$ окружности $\mu_1$. Следовательно, $\angle QAB = \dfrac{1}{2} A\breve{P}B = \angle ACB$.

Из $\Delta BKC$

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle ACB - \angle BKC = 180^\circ - \angle ACB - \left(180^\circ - \angle AKB\right) =$$

$$= \angle AKB - \angle ACB = \left(180^\circ - \frac{\sim}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\sim}{2}\right) = 90^\circ.$$

Следовательно, $CD$ - диаметр окружности $\mu_1$.




**Рекомендации по проверке.**

Найдена связь между $\angle AQB$ и $\angle AKB$:

+2 балла.

Найдена связь между $\angle QAB$ ($\angle QBA$) и $\angle BCA$ ($\angle ADB$):

+2 балла.

**6.** Даны 126 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2014. Для каждой пары этих чисел вычислили разность большего и меньшего. Докажите, что среди этих разностей имеется по крайней мере

а) четыре равных;

б) пять равных.

**Решение.**

а) Всего можно составить $\frac{126 \cdot 125}{2} = 7875$ пар чисел. Разности могут быть равны любому числу от 1 до 2013.

$7875:2013=3$ (ост. 1836). Значит, найдется по крайней мере 4 равных.
б) Обозначим числа в порядке возрастания:
$x_1, x_2, ..., x_{126}$.
Предположим, что среди модулей разностей этих чисел нет пяти равных.
Тогда
$$2014 \geq x_{126} = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_{126} - x_{125}).$$
Оценим $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_{126} - x_{125})$ снизу. По предположению среди разностей $(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), ..., (x_{126} - x_{125})$ не более четырех равны 1, не более четырех равны 2, …, не более четырех равны 31. Следовательно,
$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_{126} - x_{125}) \geq 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + ... + 4 \cdot 31 + 32 =$$
$$= 4 \cdot (1 + 2 + ... + 31) + 32 = 1984 + 32 = 2016.$$
Получим
$$2014 \geq x_{126} = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_{126} - x_{125}) \geq 1 + 2016 = 2017.$$
Противоречие.
**Рекомендации по проверке.**
За доказательство пункта а) 3 балла.
За доказательство пункта б) 7 баллов.
Баллы не суммируются.