ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

Муниципальный этап

10 класс

1. Найдите последнюю цифру числа $2015^{2} - 2014^{2} - 2013^{2}$.

2. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна произведению 2014·2015?

3.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 + 2y, \\ x^{2014} + y^{2014} = 2^{2015}. \end{cases}$$

4. При каком наименьшем натуральном k квадратичный трехчлен $y = kx^2 - px + q$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два различных положительных корня меньших 1?

5. Точка Q лежит вне окружности μ_1. QA и QB - касательные к окружности (A и B принадлежат μ_1). Через точки A и B проведена вторая окружность μ_2 с центром в точке Q. На дуге AB окружности μ_2, находящейся внутри окружности μ_1, взяли произвольную точку K. Прямая AK пересекает второй раз окружность μ_1 в точке C, а прямая BK - в точке D. Докажите, что CD - диаметр окружности μ_1.

6. Треугольник *A* содержится в выпуклом четырехугольнике В. Пусть *S(A)* и *S(B)* — площади этих многоугольников, а *P(A)* и *P(B)* — их периметры. Доказать, что $\frac{S(A)}{S(B)} < \frac{P(A)}{P(B)}$. Замечание: фигура называется выпуклой, если с каждой парой точек она содержит и отрезок их соединяющий.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

Муниципальный этап

10 класс

1. Найдите последнюю цифру числа $2015^{2} - 2014^{2} - 2013^{2}$.

2. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна произведению 2014·2015?

3.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 + 2y, \\ x^{2014} + y^{2014} = 2^{2015}. \end{cases}$$

4. При каком наименьшем натуральном k квадратичный трехчлен $y = kx^2 - px + q$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два различных положительных корня меньших 1?

5. Точка Q лежит вне окружности μ_1. QA и QB - касательные к окружности (A и B принадлежат μ_1). Через точки A и B проведена вторая окружность μ_2 с центром в точке Q. На дуге AB окружности μ_2, находящейся внутри окружности μ_1, взяли произвольную точку K. Прямая AK пересекает второй раз окружность μ_1 в точке C, а прямая BK - в точке D. Докажите, что CD - диаметр окружности μ_1.

6. Треугольник *A* содержится в выпуклом четырехугольнике В. Пусть *S(A)* и *S(B)* — площади этих многоугольников, а *P(A)* и *P(B)* — их периметры. Доказать, что $\frac{S(A)}{S(B)} < \frac{P(A)}{P(B)}$. Замечание: фигура называется выпуклой, если с каждой парой точек она содержит и отрезок их соединяющий.