ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015/2016 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Решения и критерии проверки.

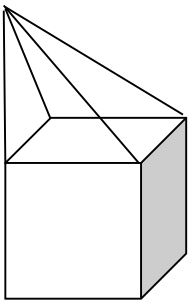
1. **Ответ:** 4. **Решение:** обозначим за 1 протяженность участка дороги, который мостила первая бригада, а через x – количество дуболомов в первой бригаде. Тогда $\frac{1}{x} < \frac{3}{x+6} \Rightarrow x+6<3x \Rightarrow x>3$.

Критерии: верное решение – 7 баллов; составлено верное неравенство, неравенство решено, но дан ответ «3» – 5 баллов; составлено верное неравенство, но дальнейших продвижений нет – 2 балла, в остальных случаях – 0 баллов.

2. **Решение:** пусть O – центр вписанной окружности. Из четырёхугольника $AKON$ находим $\angle KON=120°$. Значит, дуга KN тоже составляет 120°, и вписанный угол KMN составляет 60 градусов.

Критерии: полное обоснованное решение – 7 баллов. Отмечено, что центральный угол составляет 120 градусов – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

3. **Решение.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. К его граням с общей вершиной D_1 приклеены такие же кубы. Соединим все вершины этих трех граней с вершиной B, противоположной вершине D_1. Тогда исходная фигура разобьётся на три одинаковых многогранника, представляющие собой куб, к одной грани которого приклеена четырехугольная пирамида. Одно из боковых ребер пирамиды равно ребру куба и перпендикулярно основанию пирамиды (см. рисунок).



Критерии: описан или предъявлен на картинке правильный способ разрезания – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.

4. **Решение**: обозначим координаты точек $A(-a;\ a^2)$ и $B(b;\ b^2)$, (здесь a и b – положительные числа), составим уравнение прямой AB по двум точкам, получим $y=(b-a)x+ab$. Но точка пересечения прямой AB с осью Oy соответствует $x=0$, откуда $y_C=ab=\sqrt{a^2\cdot b^2}=\sqrt{y_A\cdot y_B}$.

Критерии: верное решение – 7 баллов. Аналитически учтено, что точки A и B принадлежат параболе $y=x^2$, предъявлен способ вычисления координаты точки C, но дальнейших продвижений нет или они ошибочны – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

5. **Ответ:** да, можно. **Решение:** пусть $A=1+2+...+n$, $B=1+2+...+k$ – два треугольных числа, тогда $A=\frac{n(n+1)}{2}$, $B=\frac{k(k+1)}{2}$. Пусть $2015=A-B \Rightarrow n(n+1)-k(k+1)=4030$. Разложим левую и правую части этого

равенства на множители, получим $(n-k)(n+k+1)=2\cdot5\cdot13\cdot31$. Заметим, что $n-k<n+k+1$ и они разной четности. Пусть, например, $n-k=2\cdot13=26$, а $n+k+1=5\cdot31=155$. Решим полученную систему уравнений, тогда $n=90,\ k=64$. Найдем $A=\frac{90\cdot91}{2}=4095$, $B=\frac{64\cdot65}{2}=2080$.

Критерии: полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена правильная формула для треугольных чисел, предъявлено верное разложение на множители числа 2015 или 4030, но при работе с системой уравнений получены не четырехзначные треугольные числа – 3 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

6. **Ответ:** может. **Решение:** разобьем карточки на 13 четверок. В каждой четверке сделаем такие сравнения: разбив четверку на пары, узнаем старшие карточки в парах (пусть $a>b$ и $c>d$), затем узнаем старшую из двух старших (пусть $a>c$). Карточка a старше двух карточек, значит, $a\neq1$. Поэтому $b\neq52$ и $c\neq52$. Сравним a и d. Если $a>d$, то $d\neq52$, поэтому число a – наибольшее в четверке. Тогда переходим к следующей четверке. Если такая ситуация повторится во всех четверках, то мы за $4\cdot13=52$ вопроса отсеем 39 карточек, не равных 52, причем среди 13 оставшихся не будет карточки 1. Сравнивая оставшиеся по одной и отбрасывая младшую, мы еще за 12 вопросов найдем из них карточку 52. Допустим, однако, что в какой-то четверке при четвертом сравнении оказалось $a<d$. Тогда возник цикл из трех карточек: $a>c>d>a$. Ясно, что такое возможно только, если в цикле есть числа 1 и 52: $c=1$, $d=52$ либо $d=1$, $a=52$. Сравним b и d ($b\neq52$). Если $b>d$, то $a=52$, а если $b<d$, то $d=52$. Значит, мы нашли карточку 52 не более чем за 53 вопроса.

Критерии: Предъявлен и обоснован алгоритм поиска нужной карточки, который работает всегда – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов. Недостаточное обоснование – минус 1-2 балла.