10 класс. Решения задач

1. Целые числа a, b и c таковы, что $|a|+|b|+|c|-|a+b+c|=2$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно 1 или -1.

Решение. Все три числа a, b, c не могут быть одновременно неотрицательными или одновременно отрицательными, так как тогда левая часть равнялась бы нулю. Предположим, что два числа неотрицательны, а одно отрицательно. (Случай, когда два числа отрицательны, а одно неотрицательно, рассматривается аналогично.) Пусть, к примеру, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c<0$. Тогда $a+b-c-|a+b+c|=2$. Если $a+b+c \geqslant 0$, то $a+b-c-a-b-c=2$, то есть $-2c=-2$, откуда $c=-1$. Если же $a+b+c<0$, то $a+b-c+a+b+c=2$, то есть $2a+2b=2$, откуда $a+b=1$. Но a и b — целые неотрицательные числа, поэтому одно из них равно 0, а второе равно 1. В обоих случаях есть число, равное 1 или -1.

2. Докажите, что если числа a и b положительны, то

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geqslant 8.$$

Решение. Согласно неравенству Коши (неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом),

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geqslant 2\cdot\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{\sqrt{ab}}=2\cdot\frac{ab+a+b+1}{\sqrt{ab}}=$$
$$=2\cdot\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{ab+1}{\sqrt{ab}}\right)=2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)+\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\right).$$

Согласно тому же неравенству Коши, каждое слагаемое в скобках в правой части не меньше 2, поэтому всё произведение не меньше 8.

3. Шахерезада рассказывала султану сказки на протяжении 1001 ночи. Сначала она рассказывала ему по 27 сказок за ночь, потом ей стало лень, и она какое-то время рассказывала по 14 сказок за ночь, а последние несколько ночей она рассказывала всего по одной сказке. Могло ли так быть, что общее число рассказанных ей султану сказок — натуральная степень двойки?

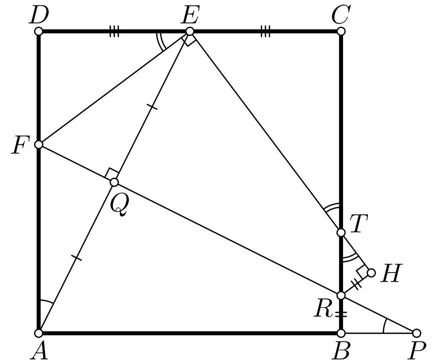
Ответ. Нет, не могло.

Решение. Пусть Шахерезада рассказывала a ночей по 27 сказок, b ночей по 14 сказок и c ночей по одной сказке. Тогда $a+b+c=1001$. Если же общее количество сказок равно 2^k, то $27a+14b+c=2^k$, откуда $26a+13b=2^k-1001$ (мы вычли из второго соотношения первое). Но 2^k не делится на 13, а остальные члены в этом выражении делятся, противоречие.

4. Бумажный квадрат $ABCD$ со стороной 1 перегнули по прямой так, что вершина A совпала с серединой стороны CD. Чему равна площадь получившегося шестиугольника?

Ответ. 61/96.

Решение. Рисунок таков:



Пусть E — середина стороны CD, Q — середина AE, $FQ \perp AE$, R — точка пересечения прямой FQ со стороной BC, P— точка её пересечения с прямой AB, $ET \perp FE$, $RH \perp TH$. Перегнуть лист бумаги по прямой — это сделать осевую симметрию относительно этой прямой. Раз точка A переходит в точку E, то прямая, по которой мы перегибали, — это ось симметрии, то есть серединный перпендикуляр к отрезку AE; у нас на рисунке это прямая FQ. Нам нужно найти площадь шестиугольника $RHTCDF$. По теореме Пифагора для треугольника ADE, $AE = \sqrt{5}/2$. Прямоугольные треугольники ADE и AQF подобны, поэтому

$$AF = AE \cdot AQ/AD = 5/8.$$

Треугольник FAP тоже им подобен, поэтому $AP = 2AF = 5/4$, откуда

$$S_{FAP} = AF \cdot AP/2 = 25/64.$$

Далее, треугольник PBR тоже им всем подобен, поэтому $RB = PB/2 = 1/8$, так как

$$PB = PA - AB = 5/4 - 1 = 1/4,$$

откуда $S_{PBR} = 1/64$. Наконец, $HR = BR = 1/8$, треугольник RHT подобен треугольнику FDE, поэтому $TH = RH \cdot ED/FD = 1/6$ (ибо $FD = 3/8$), а значит, $S_{THR} = 1/96$. Окончательно,

$$S_{RHTCDF} = S_{ABCD} - S_{FAP} + S_{PBR} + S_{THR} = 61/96.$$

5. В квадрате $n \times n$ лежит 1014 доминошек (каждая покрывает две соседние по стороне клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). При каком наименьшем n это возможно?

Ответ. При $n = 77$.

Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы они образовывали прямоугольник 2×3 (если доминошка лежит вертикально) или 3×2 (если она лежит горизонтально). Если у двух доминошек такие прямоугольники имеют хотя бы одну общую клетку, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1014 доминошек, не имеющих общих точек, умещаются в квадрате $n \times n$, то все построенные по ним прямоугольники из 6 клеток должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1) \times (n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n \times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда

$$(n+1)^2 \geqslant 6 \cdot 1014 = 6084 = 78^2.$$

Значит, $n \geqslant 77$.

Осталось привести пример, когда это возможно при $n = 77$. Для этого положим в первую строку доминошки горизонтально, начиная с первой клетки, с интервалом в одну клетку; всего их уместится 26. То же проделаем со всеми остальными нечётными строками. Общее число доминошек будет тогда $26 \cdot 39 = 1014$; они, очевидно, не имеют общих точек.