

Математика, 10 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией по математике.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения нет, то независимо от продвижения, ставить не более 3 баллов.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Ответ:** в 13/11 раза.

Решение: Скорость сближения стрелок у исправных часов составляет $1 - 1/12 = 11/12$ оборотов в час. А у новых часов: $1 + 1/12 = 13/12$ оборотов в час.

2. **Ответ:** 11.

Решение: Нечетное число делителей имеют только квадраты натуральных чисел.

Это известный факт, который легко доказать: все делители d числа N разбиваются на пары: $(d, N/d)$, и только у квадратов есть непарный делитель – квадратный корень.

Если у числа хотя бы два разных простых делителя, то их квадраты – тоже делители.

Вместе с 1 и самим числом делителей становится больше 5.

Значит, у наших чисел только один простой делитель.

Чтобы всего было 5 делителей, эти делители должны быть равны: $1, p, p^2, p^3, p^4$.

Итак, числа являются не превышающими миллиона четвёртыми степенями простых чисел.

Такие простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

3. **Решение:** Обозначим радиус окружностей за r .

Площадь четырёхугольника $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = r \cdot (AB + BC + AC) / 2 + r \cdot (CD + DA + AC) / 2$.

С другой стороны, $S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{DAB} = r \cdot (BC + CD + BD) / 2 + r \cdot (DA + AB + BD) / 2$.

Приравнявая эти выражения, получаем требуемое.

4. Решение:

Например, $f(x) = x^2 - x + 1$. В точке (1,1) равенство выполняется.

В других точках график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = x$, а график функции $x = f(y)$ лежит правее этой прямой, т.е. лежат в разных полуплоскостях.

Последнее утверждение надо доказывать.

Например, так: $(x^2 - x + 1) - x \geq 0$.

Указания по проверке:

возможны и другие примеры,

при правильном примере и отсутствии обоснования ставить 2 балла.

5. Ответ: нет.

Решение: Для решения лучше пользоваться терминологией теории графов (хотя и не обязательно).

Пусть в группах всего k_1, k_2, \dots, k_s человек (вершин графа).

Тогда, сумма степеней вершин равна $(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_s^2)$.

Это должно быть четным числом, т.к. равно удвоенному общему количеству ребер (пар друзей).

Каждое ребро в общей сумме считается два раза.

А всего вершин $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 2015$.

Но сумма чисел и сумма их квадратов имеют одинаковую четность, значит, сумма квадратов на 2 делиться не может.