11.1. Решите систему $\begin{cases} x^2+4\sin^2 y-4=0 \\ \cos x-2\cos^2 y-1=0 \end{cases}$.

Ответ: $x = 0$, $y = \pi/2+\pi k$, где k – целое число.

Из второго уравнения получаем $2\cos^2 y = \cos x - 1 \le 0$, откуда следует, что $\cos^2 y = 0$, $\sin^2 y = 1$. Теперь из первого уравнения получаем $x = 0$.

Замечание. Ошибочный ответ или правильный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.2. Рассмотрим множество квадратных трёхчленов вида $x^2+2mx+n^2$, где m и n различные натуральные числа от 1 до 100. Каких больше квадратных трёхчленов – тех, что имеют корни, или тех, которые не имеют корней?

Ответ: тех и других квадратных трёхчленов поровну.

Из условия на коэффициенты следует, что рассматриваемых квадратных трёхчленов конечное число. Разобьём это множество квадратных трехчленов на пары: $x^2+2mx+n^2$ и $x^2+2nx+m^2$. Эти трехчлены имеют дискриминанты $m^2 - n^2$ и $n^2 - m^2$. Поскольку m и n различные числа, в каждой паре один из трёхчленов имеет корни, другой не имеет корней. Таким образом, их поровну.

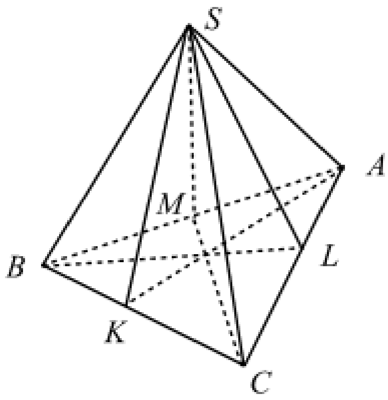
11.3. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 образуют геометрическую прогрессию. При этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами?

Ответ: 3.

Пример: пусть $a_1 = 1$, $q = \sqrt{2}$, получим геометрическую прогрессию $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$. Оценка. Если среди них есть 4 рациональных числа, то найдутся два подряд идущих рациональных члена геометрической прогрессии. Это означает, что знаменатель прогрессии (отношение последующего члена к предыдущему) есть рациональное число. Но тогда при рациональном числе a_1 – все члены прогрессии есть рациональные числа, при иррациональном – все иррациональные.

Замечания. Приведён пример геометрической прогрессии с тремя рациональными и с двумя иррациональными числами – 3 балла. Доказано, что рациональных чисел не более трёх, но примера не приведено – 3 балла. Есть и то и другое 7 баллов.

11.4. В треугольной пирамиде проведены три биссектрисы плоских углов при вершине пирамиды, а также три биссектрисы основания пирамиды. Известно, что основания двух пар проведенных биссектрис совпадают. Докажите, что основания и третьей пары биссектрис совпадают.



Первое решение. Пусть $SABC$ – данная пирамида, SK, SL, SM – соответственно биссектрисы боковых граней SBC, SCA, SAB. По условию AK и BL – биссектрисы углов A и B треугольника ABC, и нужно доказать, что CM – биссектриса угла C. По свойству биссектрисы треугольника $BS : CS = BK : CK = BA : CA$ и $CS : AS = CL : AL = CB : AB$. Перемножив левые и правые части этих равенств, получаем: $BS : AS = CB : CA$. А это и означает, что основания биссектрис, проведенных к стороне AB в треугольниках BSA и BCA, совпадают, т. е. CM – биссектриса в треугольнике ABC.

Второе решение. Пусть SK, SL, SM –биссектрисы боковых граней SBC, SCA, SAB. Тогда $BS : CS = BK : CK$, $CS : AS = CL : AL$, $AS : SB = AM : MB$, Перемножив левые и правые части этих равенств получим слева единицу. По теореме Чевы отрезки AK, BL, CM пересекаются в одной точке. По условию два отрезка есть биссектрисы углов в треугольнике ABC. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, значит и третий отрезок является биссектрисой.

11.5. Куб размером $n\times n\times n$, где n – натуральное число, разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

Ответ: 125.

Обозначим m длину ребра кубика, отличного от единичного кубика. Получаем уравнение $n^3 - m^3 = 98$ (в натуральных числах). Далее, $(n-m)(n^2+nm+m^2)=98$. Числа m и n одной четности, так как в противном случае n^3-m^3 нечетное число. При этом если n и m четные числа, то n^3-m^3 будет делиться на 8, но 98 на 8 не делится. Значит m и n нечетные, при этом первый множитель произведения $(n-m)(n^2+nm+m^2)$ есть четное число, второй – нечетное. Наконец, второй множитель больше первого: $n^2+nm+m^2>n>n-m$. Из сказанного и разложения $98=2\cdot7\cdot7$ на простые множители получаем систему уравнений $n - m =2$, $n^2 + nm + m^2= 49$. Решением этой системы в натуральных числах является единственная пара $n = 5$, $m = 3$.

Замечание. Дан правильный ответ с проверкой – до 3 баллов.