11 класс

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 3xy + y^2 + x = 1$.

Ответ: искомое множество точек – это совокупность двух прямых $y = -x - 1$ и $y = -2x + 1$. **Указание**. См. задачу 10.2.

11.2. **а)** Докажите, что если натуральные числа *x*, *y* удовлетворяют уравнению $x^3 + 64y = y^3 + 64x$, то *x* = *y*. **б)** Существуют ли различные положительные действительные числа *x*, *y*, удовлетворяющие этому уравнению?

Ответ: **б)** существуют. **Указание**. Аналогично решению задач 9.2 и 10.3, приходим к уравнению $x^2 + xy + y^2 = 64$. Если *x* и *y* – нечетные числа, то в левой части будет стоять нечетное число. Если только одно из чисел *x* или *y* четное, то левая часть также будет нечетной. Значит, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ для некоторых натуральных x_1, y_1. Подставляя эти выражения в уравнение, придем к уравнению $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 16$, а от него, аналогично, к уравнению $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 = 4$, и затем к уравнению $x_3^2 + x_3y_3 + y_3^2 = 1$, которое натуральных решений не имеет (см. задачу 9.2). **б)** См. задачу 9.2, пункт б).

11.3. Дана окружность с диаметром *AB*, касающаяся прямой *d* в точке *B*. Через точку *A* проведены два луча, пересекающие прямую *d* в точках *M* и *N*, а окружность – в точках *P* и *Q* (точки *P*, *M* лежат на одном луче, а *Q*, *N* – на другом). **а)** Докажите, что длины отрезков удовлетворяют неравенству $PQ < MN$. **б)** Докажите, что $l_{PQ} < MN$, где l_{PQ} – длина дуги с концами *P* и *Q*, не содержащей точку *A*.

Указание. **а**) Пусть $\alpha = \angle MAB$, $\beta = \angle NAB$, *R* – радиус окружности. Пусть, для определенности, *M* и *N* лежат по одну сторону от точки *B* и $< \sim$. Искомое неравенство запишется в виде $2R\sin(\alpha - \beta) < 2R(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) \Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) < \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta}$. Последнее неравенство очевидно, т.к. $\cos\sim < 1$, $\cos \quad \le 1$. Если *M* и *N* лежат по разные стороны от *B*, то при замене β на –β применимы предыдущие рассуждения. **б)** Теперь требуется доказать более сильное неравенство, а именно (.учитывая, что $2(\alpha - \beta)$ – центральный угол данной дуги): $R(2(\alpha - \beta)) < 2R(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) \Leftrightarrow \text{tg}\alpha - \alpha > \text{tg}\beta - \beta$. Рассмотрим сначала случай, когда *M* и *N* лежат по одну сторону от точки *B*. Тогда $0 \le \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \text{tg}\,x - x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Она монотонно возрастает, т.к. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \ge 0$, причем $f'(x) > 0$ при $x \ne 0$, и значит, возрастание строгое. Поэтому искомое неравенство справедливо. Если *M* и *N* лежат по разные стороны от точки *B*, то разбив точкой *B* и дугу $\overset{\cup}{PQ}$, и отрезок *MN* на две части, применим к каждой из частей доказанное неравенство (при β = 0).

11.4. Найдите геометрическое место точек *M* на координатной плоскости таких, что две касательные, проведенные из *M* к параболе $y = x^2$, перпендикулярны друг другу.

Ответ: прямая $y = -\frac{1}{4}$. **Указание**. Пусть $(a;b)$ – координаты точки *M*, и $M_1(x_1; x_1^2)$, $M_2(x_2; x_2^2)$ – точки касания с параболой двух касательных из точки *M*. Уравнение касательной в точке M_1 есть $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$ (здесь мы учли, что угловой коэффициент касательной равен $(x^2)' = 2x$). Подставляя координаты точки *M*, получим $x_1^2 - 2x_1a + b = 0$. Такое же уравнение с заменой x_1 на x_2 получим для точки M_2, т.е. x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 2ax + b = 0$, и по теореме Виета $b = x_1x_2$. Из условия перпендикулярности двух касательных имеем $(2x_2) = -\frac{1}{2x_1} \Leftrightarrow x_1x_2 = -\frac{1}{4}$. Итак, $b = x_1x_2 = -\frac{1}{4}$.

11.5. У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.

Указание. См. задачу 10.5.