11 класс

1. $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=\dfrac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}=(a+b+c)-2\cdot\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ - целое число.

2. Ответ. $x_1=4$, $x_2=5$ или $x_1=1$, $x_2=2$.

Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $f(x)$, то справедливо разложение

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. Так как корни различные, то можем полагать, что $x_1<x_2$. По условию $f(3)=(3-x_1)(3-x_2)$ - простое число, следовательно, $x=3$ не является корнем квадратного трехчлена $f(x)$, то есть $x_1\neq 3$и $x_2\neq 3$, при этом один из множителей разложения необходимо равен 1.

Рассмотрим случаи.

1) Если $3<x_1<x_2$, то $f(3)=(3-x_1)(3-x_2)=(x_1-3)(x_2-3)$ и $x_1-3<x_2-3$, поэтому $x_1-3=1$, то есть $x_1=4$. Тогда $f(3)=x_2-3$. Учитывая, что x_2 - простое число, большее 3, то оно нечетное. Тогда число $f(3)=x_2-3$ будет четным. Так как по условию оно является простым, то это возможно лишь в случае, когда оно равно 2, то есть $x_2-3=2$, откуда $x_2=5$.

Искомый квадратный трехчлен имеет вид $f(x)=x^2-9x+20$, корни которого $x_1=4$, $x_2=5$.

2) Если $x_1<3<x_2$, то $f(3)=(3-x_1)(3-x_2)<0$, поэтому этот случай невозможен.

3) Если $x_1<x_2<3$, то $f(3)=(3-x_1)(3-x_2)$ и $3-x_2<3-x_1$, поэтому $3-x_2=1$, откуда $x_2=2$. Так как x_1 - натуральное, то получаем единственно возможное значение $x_1=1$. Получим еще одно решение задачи: $x_1=1,\ x_2=2$ для трехчлена $f(x)=x^2-3x+2$.

3. Докажем сначала, что для положительных чисел x и y из неравенства $x<y$ следует неравенство $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}$. Действительно, рассмотрим разность

$$\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}.$$

Учитывая условие $x-y<0$, получим

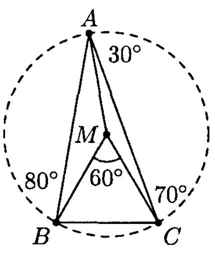
$$\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}<0.$$

Пусть согласно условию задачи $a<b+c$, тогда по доказанному выше будем иметь

$$\frac{a}{1+a}<\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

4. Ответ. $\angle MAB=20^o$, $\angle MAC=10^o$.

Рассмотрим окружность с центром в точке M и радиусом R=MB=MC (см. рис.).



$\angle A=180^o-(\angle B+\angle C)=30^o$, $\angle BMC=60^o$, следовательно, точка A лежит на этой окружности, то есть окружность является описанной для треугольника ABC. Значит, $MA=MB=MC$, тогда $\angle MAB=\angle MBA=20^o$, $\angle MAC=\angle MCA=10^o$.

5. Ответ. $x_{2015}=0$.

Покажем, что данная последовательность является периодической с периодом 9.

Найдем

$x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=-1, x_5=0, x_6=1, x_7=1, x_8=0, x_9=-1, x_{10}=1, x_{11}=2, \ldots$.

Поскольку последовательность полностью определяется любыми двумя соседними членами, мы получили, что 9 – период этой последовательности. Это означает, что для любых $k, r \in N$ справедливо равенство $x_{9k+r} = x_r$.

Найдем x_{2015}, для этого разделим число 2015 на 9 с остатком: 2015=9·223+8. Тогда $x_{2015} = x_8 = 0$.

Критерии оценивания и организация проверки работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, оцениваются частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Таким образом, при подсчете окончательных баллов по задаче жюри учитывает все перечисленные случаи, а также возможные логические и арифметические ошибки в решениях.

Проверка работ на математической олимпиаде проводится в два этапа. На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс-минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Знак	**Правильность решения**
+	Полное верное решение
+.	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
±	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений
+/2	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка
∓	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
−.	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения
−	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение.

По окончании первого этапа проверки группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведенные решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается в 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Знак	+	+.	±	+/2	∓	−.	−	0
Баллы	7	6-7	5-6	4	2-3	0-1	0	0

Максимальный балл за выполнение всех заданий – 35.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Баллы не снимаются за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, оценивается в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия или основы доказательства. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равнобедренным, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC − равнобедренный». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами жюри.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели.