Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике в 2015-2016 учебном году
11 класс
Время решения – 240 минут (4 часа)

1. На доске написали пять последовательных натуральных чисел, а потом одно число стёрли. Оказалось, что сумма оставшихся четырех чисел равна 2015. Найдите наименьшее из этих четырех чисел.
Ответ: 502
Решение. Если самое маленькое число равно K, то сумма всех чисел не меньше K + (K+1) + (K+2) + (K+3) = 4K + 6 и не больше K + (K+2) + (K+3) + (K+4) = 4K + 9. Поэтому 4K + 6 $\leq 2015 \leq$ 4K + 9, откуда K = 502.

2. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках K, L, N и M – вписанный.
Решение: Пусть концы общей хорды - точки A и B. Тогда по теореме об отрезках хорд из первой окружности KP·PM=AP·PB, а из второй - LP·PN= AP·PB. Но тогда KP·PM= LP·PN, а значит точки K, L, N и M лежат на одной окружности.

3. Чему может быть равно значение выражения $p^4-3p^3-5p^2+16p+2015$, если p является корнем уравнения $x^3-5x+1=0$?
Ответ: 2018
Решение: $p^4 - 3p^3 - 5p^2+16p+2015=(p^3-5p+1)(p-3)+2018$. Т.к. p – корень многочлена стоящего впервой скобке, то все выражение равно 2018.

4. В школе учатся 400 учеников. На Новый год каждый отправил 200 поздравлений другим ученикам. Какое наименьшее количество пар учеников поздравивших друг друга могло получиться?
Ответ: 200.
Решение: Всего поздравлений было 200*400=80000. А различных пар учеников – 400*399/2=79800, то есть на 200 меньше чем поздравлений. Значит, по крайней мере, в 200 парах было 2 поздравления. Покажем, что ровно 200 пар может быть: Пусть 1й поздравил всех со 2го до 201го, 2й – с 3го до 202, … 200й поздравил всех с 201го до 400го, а далее 201й – всех 202 до 400го и 1-го, 202 – с 203 до 400 и с 1 до 2 и т.д. Тогда парные поздравления будут только у учеников, номера которых отличаются ровно на 200.

5.У нескольких школьников есть 128 одинаковых жетонов на всех. Они играют в игру по следующему правилу: если у кого-то не меньше половины всех жетонов, то каждый из остальных берёт у этого игрока себе столько, сколько у него уже есть (если таких оказалось двое, то выбирают по жребию). Произошло 7 таких обменов. Докажите, что теперь все 128 жетонов собрались у одного школьника.
Решение: Заметим, что у тех школьников, которые берут жетоны, число жетонов удваивается. Следовательно, после первой передачи жетонов у них стало кратное 2 число жетонов, но тогда у первого школьника также осталось число жетонов кратное двум, так как их общее число четно. Аналогично после второй передачи жетонов у всех будет кратное 4 число жетонов. После 7го обмена у всех станет кратное 128 число жетонов, то есть либо 0 либо 128.