11 класс. Решения задач

1. Решите уравнение
$$\sqrt{\cos 3x - 1} = \sin x.$$

Ответ. $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Найдём область определения: поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательно, $\cos 3x \geqslant 1$, значит, $\cos 3x = 1$, откуда $3x$ может равняться только $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из первого условия видим, что k должно быть чётным. Окончательно, $x = 2\pi m$, где m — целое.

2. Коля решил изобрести шишечный язык. Для этого он берёт несколько шишек, которые бывают зелёными и не зелёными, и выкладывает их в ряд. Сколько десятишишечных слов будет в шишечном языке, если единственное правило грамматики гласит, что две зелёные шишки не могут лежать подряд?

Ответ. 144 слова.

Решение. Будем обозначать зелёную шишку буквой З, а не зелёную —буквой Н. Для произвольного натурального $n \geqslant 1$ обозначим через a_n число слов длины n в шишечном языке. К примеру, $a_1 = 2$ (слова З и Н), $a_2 = 3$ (слова ЗН, НЗ и НН). Для любого $a \geqslant 3$ заметим,что
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$
Действительно, разделим все слова длины n на две группы: те, в которых первая шишка зелёная, и те, в которых первая шишка не зелёная. В слове из второй группы после первой не зелёной шишки может стоять любой набор из $n-1$ шишки, удовлетворяющий правилу из условия, то есть любое слово шишечного языка длины $n-1$. Значит, во второй группе a_{n-1} слово. С другой стороны, в слове из первой группы после зелёной шишки должна стоять не зелёная, а потом — любое слово длины $n-2$, то есть в первой группе a_{n-2} слов, откуда и получаем требуемое выражение для a_n. (Другими словами, a_n — это просто число Фибоначчи.) Теперь последовательно находим $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, …, $a_{10} = 144$.

3. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} \text{НОК}(m,n) + \text{НОД}(m,n) = m + n, \\ m - n = 2015. \end{cases}$$

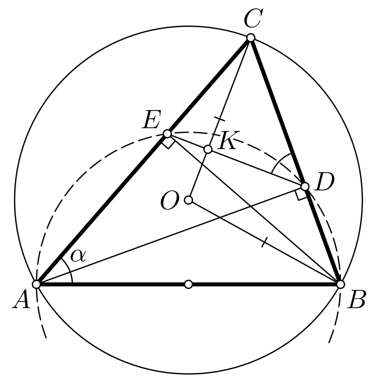
Ответ. Возможные варианты для пары (m, n): (2016, 1), (2020, 5), (2028, 13), (2046, 31), (2080, 65), (2170, 155), (2418, 403), (4030, 2015).

Решение. *I способ.* Произведение НОК и НОД любых двух натуральных чисел равно произведению этих чисел. Из этого факта, первого уравнения и теоремы Виета следует, что НОК и НОД чисел m и n являются корнями того же приведённого квадратного трёхчлена, что и сами m и n, а значит, они равны m и n (в каком-то порядке). Поскольку $m > n$ (из второго уравнения), m — это НОК, а n — это НОД. Получается, что $m = kn$ для какого-то натурального $k > 1$. Тогда из первого уравнения
$$(k-1)n = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$
Таким образом, n может быть любым натуральным делителем числа 2015, а m находится из второго уравнения, что и даёт указанный выше ответ.

II способ. Пусть $n = ad$, $m = bd$, где d — их НОД, а числа a и b взаимно просты. Тогда НОК равно abd; из первого уравнения получаем, что $abd + d = ad + bd$, то есть $ab + 1 = a + b$, откуда $(a-1)(b-1) = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a и b равно 1. Второе уравнение показывает, что $m > n$, поэтому $a = 1$, $b > 1$, то есть m делится на n. Далее как в первом способе.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. В нём проведены высоты AD и BE и отмечен центр описанной окружности O. Докажите, что $CO \perp DE$.

Решение. Рисунок таков:



Обозначим $\alpha = \angle BAC$. Поскольку оба угла AED и BDE прямые, четырёхугольник $ABDE$ — вписанный. Значит, $\angle BDE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - \alpha$ и $\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE = \alpha$. С другой стороны, $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу в окружности, описанной около треугольника ABC, что и вписанный угол BAC. Из равнобедренного треугольника BOC ($BO = OC$ как радиусы) находим $\angle BCO = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$. Если теперь K — точка пересечения прямых CO и DE, то в треугольнике KCD углы KCD и KDC равны $90^\circ - \alpha$ и α соответственно, поэтому $\angle DKC$ — прямой.

5. Пусть a, b, c, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

Решение. Подберём такое положительное число x, для которого выполняется условие

$$a + x \geqslant \sqrt{4a+1}.$$

Поскольку обе части этого неравенства больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Возведя обе части в квадрат, перенеся всё в левую часть и группируя слагаемые, получим такое неравенство:

$$a^2 + (2x-4)a + (x^2-1) \geqslant 0.$$

Оно будет верным, к примеру, если дискриминант квадратного трёхчлена от a, стоящего в левой части, равен нулю: $D = 16x - 20 = 0$, откуда $x = 5/4$. Итак, $a + 5/4 \geqslant \sqrt{4a+1}$; такое же неравенство, разумеется, выполняется и для b, c, d. Складывая эти четыре неравенства, получим:

$$a + b + c + d + 4 \cdot 5/4 \geqslant \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}.$$

Левая часть равна $1 + 5 = 6$, так как $a + b + c + d = 1$ по условию. Осталось заметить, что равенство возможно только в случае, когда $a + 5/4 = \sqrt{4a+1}$ и т.п., то есть $a = b = c = d = 3/4$, что противоречит условию.