6 класс

6.1. В двузначном числе A поменяли цифры местами и получили число B. Найдите такое A, чтобы сумма $A + B$ делилась на 17.

Ответ. $A = 89$ или $A = 98$.

Решение. Подойдет $A = 89$ или $A = 98$. В обоих случаях $A + B = 187 = 17 \cdot 11$.

Комментарий. Любой из двух правильных ответов — 7 баллов.

6.2. Решите ребус ДОН + ОКА + ЛЕНА + ВОЛГА = АНГАРА или объясните, почему ребус не имеет решения. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).

Ответ. Ребус не имеет решения.

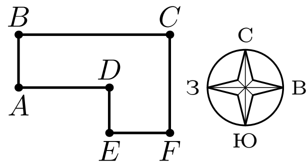
Решение. Рассмотрев последние цифры ребуса, мы получаем, что сумма Н+А+А+А оканчивается на А, значит, Н+А+А оканчивается на 0. Сумма чисел ДОН+ОКА+ЛЕНА+ВОЛГА меньше, чем $999 + 999 + 9999 + 99999 < 1000 + 1000 + 10000 + 100000 < 120000$. Поскольку эта сумма есть АНГАРА, это означает, что А $= 1$ и Н < 2. Но, так как Н $\neq$ А, получаем, что Н $= 0$. Но тогда Н + А + А $= 2$ — противоречие.

Замечание. Получить противоречие можно и по-другому. Например, сначала можно доказать, что А $= 1$. Потом рассмотреть сложение последних цифр и показать, что Н $= 8$.

Комментарий. Замечено, что буква А равна 1 — 2 балла.

Замечено, что буква Н равна 0 (из рассмотрения начала числа АНГАРА) или 8 (из рассмотрения конца числа АНГАРА) — 2 балла.

6.3. В парке все велосипедные дорожки идут с севера на юг или с запада на восток. Петя и Коля одновременно стартовали из точки A и проехали на велосипедах с постоянными скоростями: Петя — по маршруту A–B–C, Коля — по маршруту A–D–E–F–C (см. рис.), причем оба затратили на дорогу по 12 минут. Известно, что Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети. Сколько времени он ехал по участку DE? На рисунке масштаб не соблюден.



Ответ. 1 минуту.

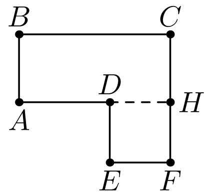


Рис. 2

Решение. Проведем отрезок DH, как показано на рис. 2. Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети, поэтому ему на дорогу по маршруту A–B–C потребовалось бы $12/1{,}2 = 10$ минут. Разность во времени $12 - 10 = 2$ минуты — это время, затраченное на движение по отрезку DE вниз и движение по отрезку FH вверх. Из равенства $DE = FH$ следует, что путь DE Петя преодолеет за 1 минуту.

Комментарий. Правильный ответ при отсутствии обоснований — 2 балла.

6.4. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 2×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. При n, делящихся на 6.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 2x = 6x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 2 и на 3. Следовательно, n должно делиться на 2 и на 3, а поэтому и на 6.

Если же n делится на 6, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что прямоугольник 2×3 выкладывается из двух плиток — по одной каждого вида. А квадрат $6k \times 6k$ можно разрезать на прямоугольники 2×3.

Комментарий. Показано, что n делится на 6 — 3 балла.

Показано, что при $n = 6k$ пол можно уложить — 4 балла.

Показано только, что при $n = 6$ пол можно уложить — 1 балл.

Утверждение «Если n^2 делится на 6, то и n делится на 6» можно использовать без доказательства.

6.5. За круглый стол сели 12 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть лжец». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть рыцарь»?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что два лжеца не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой лжец не может сказать вторую фразу.

С другой стороны, 3 рыцаря также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-лжец). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть лжец, то есть не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4 \cdot 2 = 8$ человек могли сказать вторую фразу.

Ровно 8 (рыцарей) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: ЛРРЛРРЛРРЛРР.

Замечание. Для того, чтобы рыцарь сказал вторую фразу, он должен сидеть рядом с другим рыцарем. Отсюда несложно получить, что оптимальный пример — единственный (с точностью до поворота стола).

Комментарий. Замечено, что 3 рыцаря не могут сидеть рядом — 1 балл.

Замечено, что 2 лжеца не могут сидеть рядом — 1 балл.

Показано, что число сказавших требуемую фразу не больше 8 — 3 балла.

Приведен пример, показывающий, что ровно 8 из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу — 2 балла.