## 7–8 классы. Решения задач

1. Все гномы делятся на лжецов и рыцарей. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. На каждой клетке доски $4 \times 4$ стоит по гному. Известно, что среди них есть и лжецы, и рыцари. Каждый гном заявил: «Среди моих соседей (по стороне) лжецов и рыцарей поровну». Сколько всего лжецов?

Ответ. 12 лжецов.

Решение. Любой гном, стоящий у стороны квадрата, но не в углу, не может говорить правду, потому что у него три соседа, а значит, среди них не может быть поровну рыцарей и лжецов, поэтому все эти восемь гномов — лжецы. Тем самым, гномы, стоящие в углах, — тоже лжецы, потому что оба их соседа — лжецы, а не рыцарь и лжец. Итак, все гномы, кроме четырёх центральных, — лжецы. Поскольку среди гномов есть рыцари, хотя бы один из четырёх центральных — рыцарь. Два его соседа уже точно лжецы, значит, два оставшихся — рыцари. Чтобы у любого из этих двух соседей-рыцарей было поровну рыцарей и лжецов среди соседей, нужно, чтобы и четвёртый центральный гном был рыцарем. Получается, что всего 12 лжецов. На рисунке ниже рыцари обозначены буквой Р, а лжецы — буквой Л.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Л | Л | Л | Л |
| Л | Р | Р | Л |
| Л | Р | Р | Л |
| Л | Л | Л | Л |

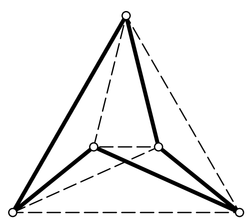
2. На доске выписаны все целые числа от 1 до двузначного числа $n$. Дима посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что общее число цифр записывается теми же цифрами, что и $n$, но в обратном порядке. Найдите все такие $n$.

Ответ. $n = 36$.

Решение. От 1 до 9 ровно девять цифр, от 10 до $n$ ровно $n - 9$ двузначных чисел, то есть $2n-18$ цифр. Значит, число $2n-18+9 = 2n-9$ записывается теми же цифрами, что и $n$. Если $a$ — число десятков в $n$, а $b$ — число единиц, то $2\cdot(10a+b)-9 = 10b+a$, то есть $19a = 8b+9$. Перебирая $b$ от 0 до 9, убеждаемся, что правая часть делится на 19 только при $b = 6$. Соответственно, $a = 3$, то есть $n = 36$.

3. Нарисуйте два многоугольника, у которых все вершины совпадают и нет ни одной общей стороны.

Решение. Например, так:

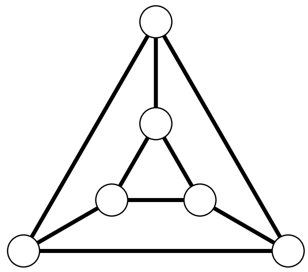


4. Существует ли такое натуральное число $n$, что в числе $n^2 + 3$ ровно десять цифр, причём все они различны?

Ответ. Нет, не существует.

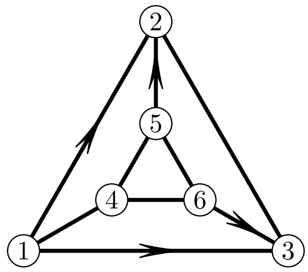
Решение. Если в десятизначном числе $n^2 + 3$ все цифры различны, то оно делится на 9 (по признаку делимости на 9: сумма его цифр равна 45). Но тогда оно делится на 3, а значит, и само число $n$ делится на 3, так как 3 — простое. А тогда $n^2 + 3$ даёт остаток 3 при делении на 9 — противоречие.

5. На рисунке некоторые кружки соединены между собой. Можно ли в каждый из 6 кружков вписать натуральное число так, чтобы в каждой паре кружков, соединённых отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединённых парах такого не было?



Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Предположим,что это возможно. Выберем из трёх внешних кружков тот, в котором написано самое маленькое число (если их несколько, возьмём любой из них). Пусть, например, это кружок номер 1 (см. рисунок). Будем рисовать стрелку от одного кружка к другому, если число во втором кружке делится на число в первом кружке.




Тогда от кружка номер 1 идут стрелки к кружкам номер 2 и 3, так как числа в них не меньше, чем в кружке номер 1. Получается, что от кружка номер 2 не может идти стрелка к кружку номер 5, потому что иначе число, написанное в кружке 5, будет делиться на число в кружке 1, а так не должны быть; значит, стрелка идёт от 5 к 2. Аналогично, стрелка идёт от 6 к 3. Но тогда мы не можем никуда направить стрелку между 5 и 6: если она идёт от 5 к 6, то число в кружке 3 делится на число в кружке 5, а так не должно быть, а если наоборот, то число в кружке 2 делится на число в кружке 6 — тоже противоречие.