8.1. Даны положительные числа *a, b, c, d, e*. Известно, что *ab*=2, *bc*=3, *cd*=4, *de*=15, *ea*=10. Чему равно *a*?

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Перемножим первое, третье и пятое равенства и разделим на второе и четвертое: $\frac{ab \cdot cd \cdot ea}{bc \cdot de} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10}{3 \cdot 15}$. Отсюда $a^2 = \frac{16}{9}$ и $a = \frac{4}{3}$.

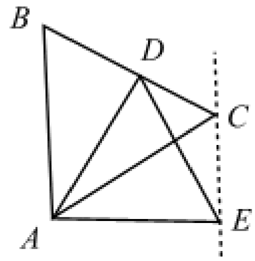
8.2. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в котором все цифры различные и которое делится на любую из своих цифр (не забудьте пояснить, почему оно наибольшее).

Ответ: 9864.

Во-первых, искомое число не может иметь вид $\overline{987a}$, поскольку делимость на цифру 7 будет означать, что *a* это 0 или 7. Значит искомое число – меньше. Во-вторых, рассмотрим числа вида $\overline{986a}$. Делимость на цифру 9 будет означать, что 9+8+6+ *a* = *a* +23 делится на 9. Значит, *a* = 4. Таким образом, получили число 9864. Сумма его цифр 27, значит, оно делится на 9, поскольку число 864 делится на 8, то и само число делится на 8. Значит, оно делится на 6 и 4.

8.3. На контрольной работе учитель дал пять задач и ставил за контрольную оценку, равную количеству решённых задач. Все ученики, кроме Пети, решили одинаковое число задач, а Петя – на одну больше. Первую задачу решили 9 человек, вторую – 7 человек, третью – 5 человек, четвёртую – 3 человека, пятую – один человек. Сколько четвёрок и пятерок было получено на контрольной работе?

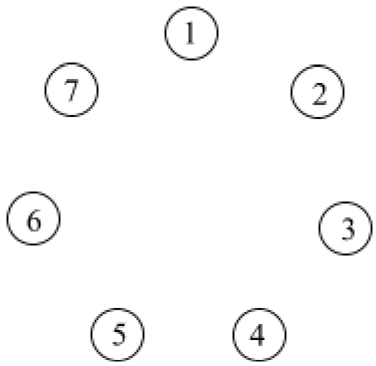
Ответ: Ни одной. Предположим, что Петя получил не меньше четвёрки, тогда остальные решили не меньше 3 задач каждый, и суммарное число задач, решённых всеми учениками, – не меньше $3 \cdot 9 = 27$ (из условия видно, что число учеников не меньше 9). Но, с другой стороны, это число равно 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25. Противоречие.



8.4. Два равносторонних треугольника *ABC* и *ADE* расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямые *AB* и *CE* параллельны.

Во-первых, $\angle BAD + \angle DAC = 60^\circ = \angle DAC + \angle CAE$, значит, углы *BAD* и *CAE* равны. Во-вторых, *AB* = *AC* и *AD* = *AE*, значит, треугольники *BAD* и *CAE* равны. Из этого следует равенство углов *ABD* и *ACE*, причем оба угла равны по 60 градусов. Кроме того, сумма углов *BCA* и *ACE* составляет 120 градусов. Осталось заметить, что сумма углов *ABC, BCE* равна 180 градусов.

8.5. По кругу лежит семь монет, среди которых три фальшивые, которые весят одинаково и легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты лежат подряд. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?



Занумеруем монеты по кругу. Положим на разные чаши весов монеты 3 и 6. Если весы окажутся в равновесии, то это две настоящие монеты, поскольку они одинаковы, а предположение об их фальшивости приводит к тому, что фальшивых не менее четырёх. Кроме того, фальшивыми могут быть только монеты с номерами 7, 1, 2. Рассмотрим случай, когда на первом взвешивании нет равновесия. Пусть для определённости монета 6 легче монеты 3. Ясно, что 6 – фальшивая, 3 – настоящая. Положим на одну чашу весов монеты 3 и 6, на другую монеты 4 и 5. Если монеты 6 и 3 окажутся тяжелее монет 4 и 5, то фальшивые монеты это 4, 5, 6, если равенство, то это 5, 6, 7 и если 6 и 3 легче 4 и 5, то фальшивые монеты это 6, 7, 1.