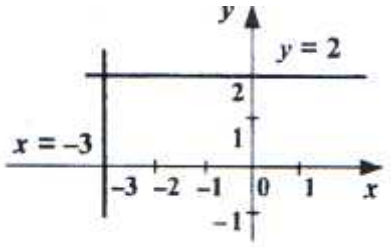
8 класс

№1. Построить график уравнения $(x+3)(y-2)=0$

Решение:

График состоит из двух прямых: x = -3; y = 2.

Ответ:



7 баллов – задание выполнено верно.
2 балла – построена одна из двух прямых.

№2. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 4$.

Решение:

Так как $xy – x – y - 4=0$, то $(x - 1)(y - 1) = 5$. Поскольку $5 = 5\cdot1 = 1\cdot5 = (-5)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-5)$, то получим четыре системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x-1=5, \\ y-1=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=5, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-1=-5, \\ y-1=-1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-5. \end{cases}$

Откуда находим четыре пары (6;2), (2;6), (-4;0), (0;-4).

Ответ: (6;2), (2;6), (-4;0), (0;-4).

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

3 балла – ход решения верный, но решение не доведено до конца или допущена вычислительная ошибка или описка

2 балла – ответ найден подбором.

1 балл – ответ дан без обоснования.

№3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны AC за точку C - точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

Решение:

Через точку M проведем прямую, параллельную AC. Обозначим $\angle CAM = \alpha$. Через точку M проведем прямую, параллельную AC. Пусть она пересекает сторону AB в точке K. Тогда $\angle AMK = \angle MAN = \angle MNC = \alpha$, $\angle CMN = \angle ACM - \angle MNC = 60^o - \alpha = \angle MAK$, поэтому треугольники MCN и AKM равны по стороне ($MN=AM$) и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $CN = MK = BM$.

7 баллов – задание выполнено верно.

4 балла - решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.

1 балл - рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

№4. При каких целых n число $n^4 + 4$ является простым?

Решение:

Разложим выражение $n^4 + 4$ на множители. Имеем $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 – (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2) \cdot (n^2 - 2n + 2)$.

Простым числом называется целое положительное число, большее единицы, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы: 2; 3; 5; 7; 11; 13; …. Поэтому, если для какого-то целого n число $n^4 + 4$ является простым, то обязательно либо $n^2 + 2n + 2 = 1$, либо $n^2 - 2n + 2 = 1$. Если рассматривать эти равенства как уравнения относительно n, то из первого уравнения вытекает, что $n = -1$, а из второго – что $n = 1$. Проверкой убеждаемся, что при $n = \pm 1$ число $n^4 + 4$ равно 5 и, значит, является простым числом.

Ответ: $n = \pm 1$.

7 баллов – задание выполнено верно.

3 балла – решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка или описка.

№5. В первой группе класса «А» первенства СССР по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение:

Золотые медали может получить любая из 17 команд. Иными словами, здесь у нас 17 возможностей. Но если золотые медали уже получены какой-то командой, то остается лишь 16 претендентов на серебряные медали. Повторения здесь не может быть – одна и та же команда не может завоевать и золотые, и серебряные медали.

Значит, после вручения золотых медалей какой – то команде остается 16 возможностей получения серебряных медалей. Точно так же если уже вручены и золотые, и серебряные медали, то бронзовые медали может получить лишь одна из оставшихся 15 команд. Получаем, что медали могут быть распределены $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ способами.

Ответ: 4080 способов.

7 баллов – задание выполнено верно.

5 баллов - решение в целом верное, однако, оно содержит одну логическую ошибку.

2 балла - найден верный ход решения, но решение не доведено до конца.