Олимпиадные задания муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2015-2016 учебного года

11-й класс

11.1 Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то $\cos 2x = f(\sin x)$, где $f(x) = 1 - 2x^2$. Заметив это, одиннадцатиклассник Вася пытается найти функцию g(x), для которой $\cos 3x = g(\sin x)$ при всех значениях x. Удастся ли ему это сделать?

11.2 CK – биссектриса угла C треугольника ABC (точка K лежит на стороне AB). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, находится вне круга, для которого отрезок BK является диаметром.

11.3 Даны 100 чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$, отличных от нуля. Рассматриваются всевозможные попарные произведения $a_i \cdot a_j$, $1 \le i < j \le 100$. Докажите, что среди этих произведений более 49% положительных.

11.4 Для заданного натурального числа $a > 1$ найдите все такие натуральные числа b, для которых число $ab - 1$ делится на число $a^2 - 1$.

11.5 125 студентов пришли в большую аудиторию. Каждый из студентов знаком ровно с десятью другими. Некоторые из студентов покинули аудиторию во время перерыва. Затем выяснилось, что все оставшиеся студенты знакомы с одинаковым числом людей, оставшихся в аудитории. Докажите, что среди студентов, которые ушли, были знакомые друг с другом.