Всероссийская олимпиада по математике
Муниципальный этап 2015–2016 уч. г.
11 класс

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 3xy + y^2 + x = 1$.

11.2. **а)** Докажите, что если натуральные числа *x*, *y* удовлетворяют уравнению $x^3 + 64y = y^3 + 64x$, то $x = y$. **б)** Существуют ли различные положительные действительные числа *x*, *y*, удовлетворяющие этому уравнению?

11.3. Дана окружность с диаметром *AB*, касающаяся прямой *d* в точке *B*. Через точку *A* проведены два луча, пересекающие прямую *d* в точках *M* и *N*, а окружность – в точках *P* и *Q* (точки *P*, *M* лежат на одном луче, а *Q*, *N* – на другом). **а)** Докажите, что длины отрезков удовлетворяют неравенству $PQ < MN$. **б)** Докажите, что $l_{PQ} < MN$, где l_{PQ} – длина дуги с концами *P* и *Q*, не содержащей точку *A*.

11.4. Найдите геометрическое место точек *M* на координатной плоскости, таких, что две касательные, проведенные из *M* к параболе $y = x^2$, перпендикулярны друг другу.

11.5. У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.