



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 11 КЛАСС I ВАРИАНТ

1. Уравнение $ax + \frac{a}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{a}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{a}{x} = b - 1$.

2. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется *ло-рошм*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими?

3. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна основанию BC в точке K . Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке $L \neq A$. Докажите, что $BL = KC$.

4. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y).$$

Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$.

5. На доске написаны два числа: 10^9 и 10^8 . Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.rdm1.gas.ru/~olymp и www.apichkov.ru/olimprius/matem
13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Уравнение $ax - \frac{a}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax - \frac{a}{x} = b - 2$ и $ax - \frac{a}{x} = b + 2$.

2. По кругу расставили числа от 1 до 30. Число называется *ло-рошм*, если оно делится на число, стоящее слева от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими?

3. На основании DC равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка M , а на боковой стороне BC — точка N так, что $DM = CN$ и точки A, M, N, B лежат на одной окружности. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC .

4. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$f(x^2 - 2y) \leq f(x^2 - y).$$

Известно, что $f(1000) = 1000$. Найдите $f(2015)$.

5. На доске написаны два числа: 10^7 и 10^{10} . Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН;
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.rdm1.gas.ru/~olymp и www.apichkov.ru/olimprius/matem
13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb