Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 9 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 301 на пары, числа в парах сложить, и эти суммы перемножить, чтобы полученное произведение оказалось 15-й степенью натурального числа?

2. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа a и b ($0 \leqslant a, b \leqslant 8$), что количество школьников, у которых до махинаций был результат a баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат b баллов, отличаются не меньше чем на 100.

3. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду?

4. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \quad y = bx + a, \quad y = bx + c, \quad y = cx + b, \quad y = ax + c, \quad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина c/a?

5. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ *указать о себе* (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) *следующие данные:*

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem
13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb

Отпечатано в РИС «СПб ГДТЮ» 2015 г. Заказ 71/9 Тираж 800 экз.

Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 9 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 201 на пары, числа в парах сложить, и эти суммы перемножить, чтобы полученное произведение оказалось 10-й степенью натурального числа?

2. В деревне Гадюкино жило 8000 пенсионеров. Каждый из них получал пенсию в размере от 1000 до 8000 рублей (целое число тысяч). После пенсионной реформы гадюкинцы, получавшие пенсию 4000 руб. или менее, стали получать 2000 руб., а те кто получал 5000 руб. или более, стали получать 7000 руб. В результате средний размер пенсии уменьшился на 100 руб. Докажите, что существуют такие натуральные числа a и b ($1 \leqslant a, b \leqslant 8$), что количество пенсионеров, получавших до реформы пенсию a тысяч рублей, хотя бы на 200 больше количества пенсионеров, получавших до реформы пенсию b тысяч рублей.

3. В ряд выстроилось несколько мальчиков и девочек. Среди любых 300 детей подряд мальчиков и девочек поровну, а среди любых 302 детей подряд не поровну. Какое наибольшее количество детей может стоять в этом ряду?

4. Квадратный трехчлен $3ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \quad y = bx + a, \quad y = bx + c, \quad y = cx + b, \quad y = ax + c, \quad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое минимальное значение может принимать величина a/c?

5. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин B и C пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне AB — точка Q так, что $CP = 2PA$, $BQ = 2QA$. Докажите, что $\angle AQC_1 = \angle APB_1$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ *указать о себе* (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) *следующие данные:*

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.
КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem
13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb

Отпечатано в РИС «СПб ГДТЮ» 2015 г. Заказ 71/9 Тираж 800 экз.