10 класс

1. Докажите, что первые 2015 натуральных чисел можно разбить на два множества так, чтобы произведение чисел одного из этих множеств было равно сумме чисел другого.

2. Существуют ли такие четыре натуральных числа, что каждое из них делится на разность любых двух других?

3. Шестнадцать команд разыграли турнир по олимпийской системе (то есть сначала играются матчи в восьми парах, проигравшие выбывают, остается восемь команд. Затем аналогично остается четыре команды, потом две, которые и определяют победителя). Команды упорядочены по силе – имеют рейтинг от 1 (самая сильная) до 16 (самая слабая). Во всех встречах победила более сильная по рейтингу команда. Назовем встречу скучной, если разница рейтингов команд-участниц больше 4. Какое наименьшее количество скучных встреч могло состояться в турнире?

4. Треугольник ABC остроугольный и неравнобедренный. В нем проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами отрезков BX, CY, AZ соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников CAX, ABY и BCZ являются вершинами треугольника, равного треугольнику ABC.

5. В строку записаны несколько натуральных чисел. Разрешается выбрать два рядом стоящих числа, таких что левое больше правого, переставить их местами и при этом умножить оба числа на 2. Докажите, что рано или поздно перестановки прекратятся.