Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2016 г.)

10 класс

1. Существует ли выпуклый 2016-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?

Решение. Предположим, что такой многоугольник существует. Каждый угол этого многоугольника не превосходит 179^0, поскольку меньше 180^0 и является целым числом. Значит, сумма его углов не превосходит $2016 \cdot 179^0 = 360864^0$. С другой стороны, известно, что сумма углов любого выпуклого 2016-угольника равна $2014 \cdot 180^0 = 362520^0$. Видим, что $360864^0 < 362520^0$. Полученное противоречие показывает, что такого многоугольника не существует.

2. Определите год рождения тех людей, которым в 2015 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения.

Решение. Пусть год рождения этих людей $1900+10x+y$. Тогда по условиям задачи составим уравнение

$$2015 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y,$$

которое после преобразования примет вид:

$$11x + 2y = 105 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{105 - 2y}{11} \quad \Rightarrow \quad x = 9 + \frac{6 - 2y}{11}.$$

Решая последнее уравнение в целых числах, найдем: $y = 3$, $x = 9$.
Ответ: год рождения 1993.

3. Найдите все значения числового параметра *a*, при которых корни уравнения $(a+1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ положительны.

Решение. Если $(a+1)=0$, то уравнение будет линейным, и его корнем при $a = -1$ является $x = 1$. Подходит.

Если $a \neq -1$, то уравнение будет квадратным. По теореме Виета его корни положительны тогда и только тогда, когда выполняется

$$\begin{cases} \dfrac{(a+3)}{(a+1)} > 0, \\ \dfrac{a}{a+1} < 0, \\ D/4 = a^2 - (a+1)(a+3) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty), \\ a \in (-1; 0), \\ a \in (-\infty; -3/4]. \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; -3/4].$$

С учетом первого случая получаем ответ $a \in [-1; -3/4]$.

Ответ: $a \in [-1; -3/4]$.

4. Последовательность числовых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, … удовлетворяет условиям:

1) $f_1(x) = x$**;**

2) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ **для любого** $n \in$ **N.**

Найдите f_{2015} **(2015),** f_{2016}**(2016).**

Решение. По условию имеем последовательность числовых функций:

$$x;\ \ \frac{1}{1-x};\ \ \frac{x-1}{x};\ \ x;\ \ \frac{1}{1-x}\ \ ;\frac{x-1}{x};\ \ldots$$

(это проверяется по формулам).

Значит, $f_{3n}(x) = \dfrac{x-1}{x};\ \ f_{3n-1}(x) = \dfrac{1}{1-x};\ \ f_{3n-2}(x) = x,\ n \in Z$.

Тогда

$$f_{2015}(2015) = f_{3n-1}(2015) = \frac{1}{1-2015} = -\frac{1}{2014},\quad f_{2016}(2016) = \frac{2015}{2016}.$$

Ответ: $f_{2015}(2015) = -\dfrac{1}{2014},\quad f_{2016}(2016) = \dfrac{2015}{2016}.$

5. Докажите, что число $24^{2015} + 14^{2015}$ **делится на 19.**

Доказательство. Из того, что 24 = 19 + 5, 14 = 19 – 5, получаем $24^{2015} + 14^{2015} = (19 + 5)^{2015} + (19 - 5)^{2015} = 19 \vdots A + 5^{2015} + 19 \vdots B - 5^{2015} = 19(A + B)$, где A и B – некоторые натуральные числа. Что и требовалось доказать.